Számítási módszerek
Energetikai módszer

Alakítótechnológiák elmélete
(BMEGEMTNG00)

Energetikai módszer

$$J^* = \int_V k_f \dot{\varphi}^{eq} dV + \int_{A_\Gamma} \tau |\Delta v| dA_\Gamma + \int_{A_s} \tau_s |\Delta v| dA_s = \int_{A_t} T_i v_i$$

belső erők teljesítménye

szakadó felületi teljesítmény

súrlódó erők teljesítménye

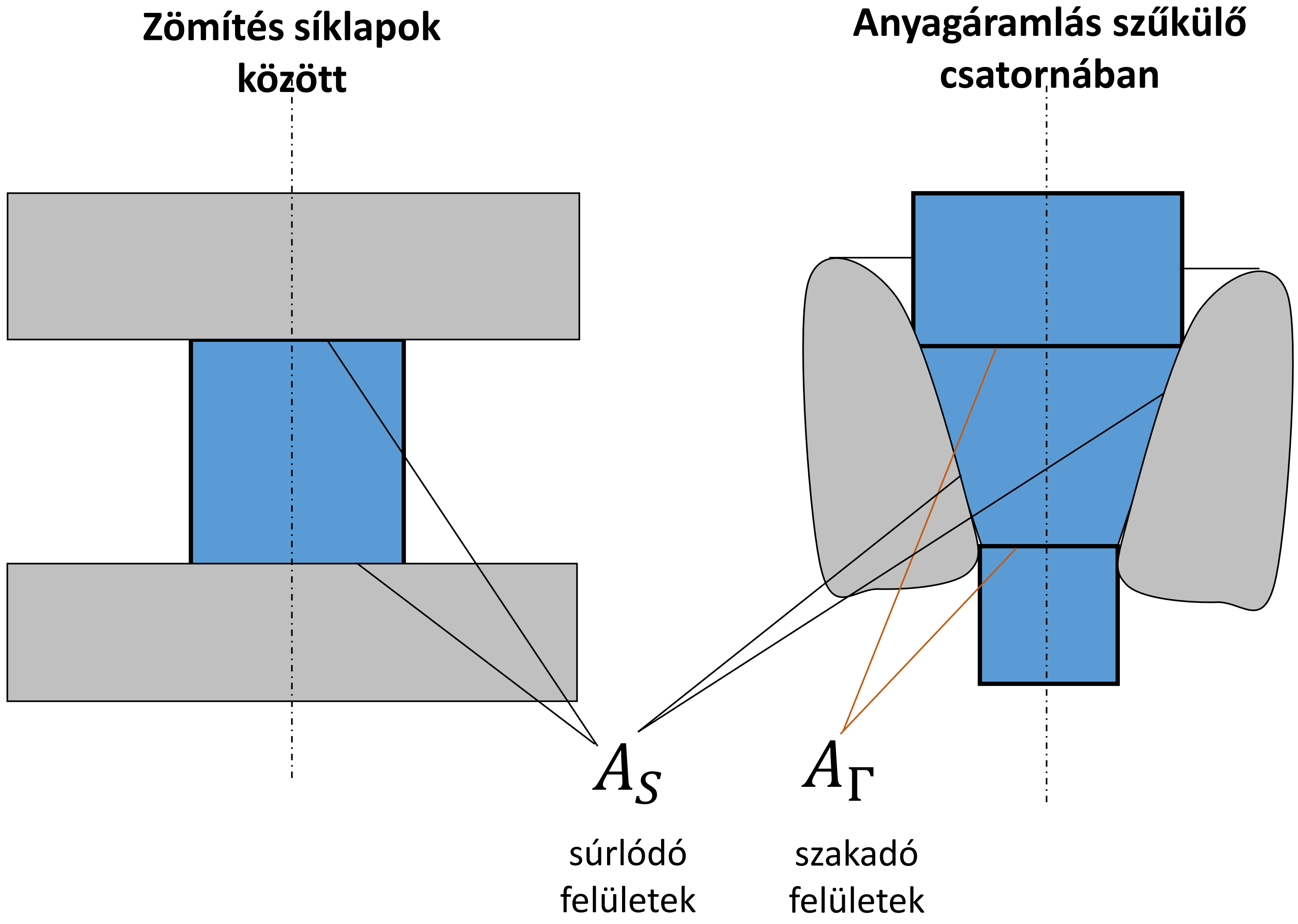
külső kényszerek teljesítménye

A kinematikailag lehetséges alakváltozási sebességmezők közül az aktuális minimalizálja a fenti kifejezést.

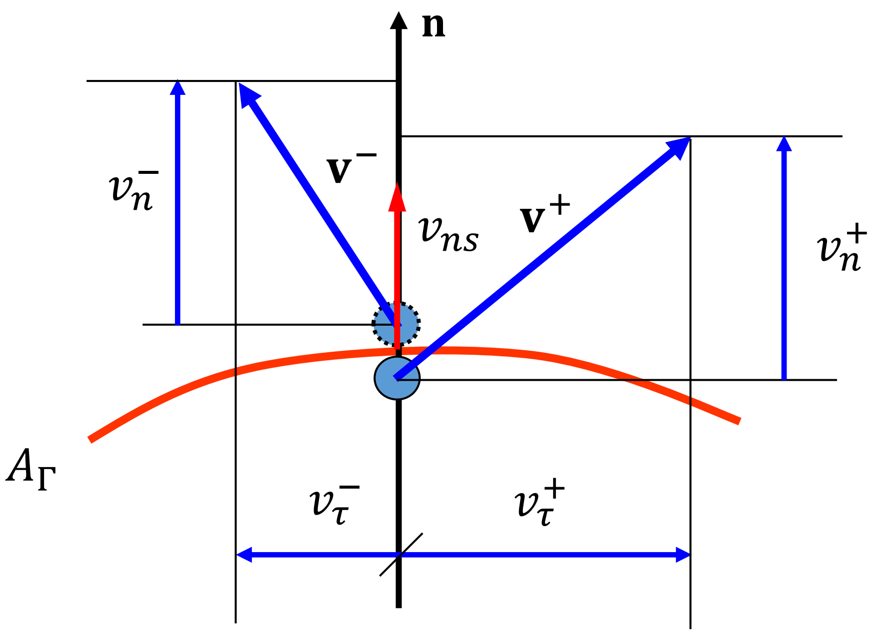
Egy kinematikailag lehetséges sebességmező kielégíti az összenyomhatatlanság feltételét, valamint a kinematikai peremfeltételeket.

$$J^* = \dot{W}_i + \dot{W}_\Gamma + \dot{W}_s = \dot{W}_t$$

Sebességmező szakadása



Sebességmező szakadása



A felületre normális sebességkomponens azonos a felület mindkét oldalán:

$$v_n^+ = v_n^-$$

Az érintő komponens ugrásszerűen változik:

$$\Delta v = v_\tau^+ - v_\tau^- \neq 0$$

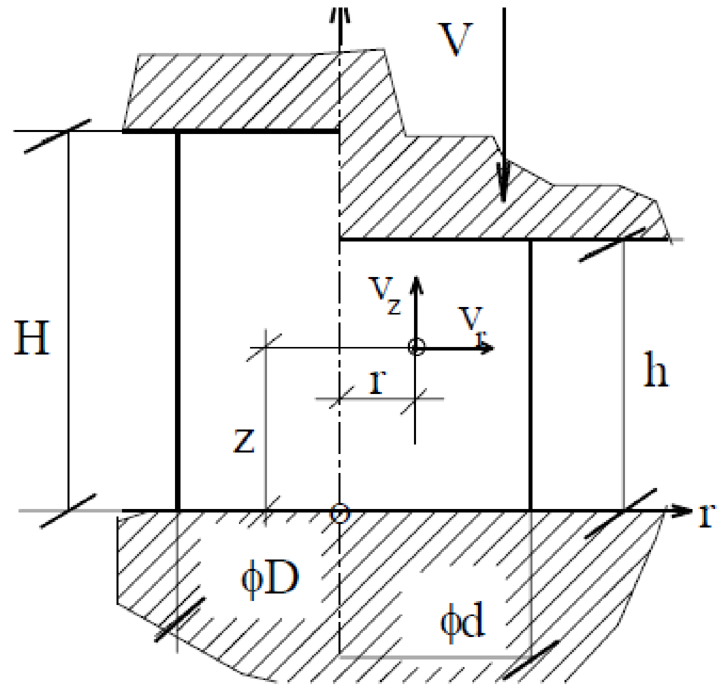
A felületen áthaladva az anyagi rész alakváltozást szenved:

$$\Delta\varphi_{eq} = \frac{|\Delta v|}{\sqrt{3}(v_n - v_{ns})}; \quad \bar{\sigma}_\Gamma = \frac{1}{\Delta\varphi_{eq}} \int_{\varphi_{eq}}^{\varphi_{eq}+\Delta\varphi_{eq}} k_f \, d\varphi_{eq}$$

Hengeres tömör test zömítése

Kinematikai vizsgálat

$$v = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix}$$



$$z = 0 \quad v_z = 0$$
$$z = h \quad v_z = -v$$

$$v_z = C_1 + C_2 z$$

$$v_z = -\frac{v}{h} z$$

Összenyomhatatlanság:

$$div\ v = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(v_r r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$v_r r = \int -r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

$$v_r r = \frac{v r^2}{2h} + f(C, z)$$

$$\dot{\varphi}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\dot{\varphi}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}$$

$$\dot{\varphi}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{v}{h}$$

Hengeres tömör test zömítése

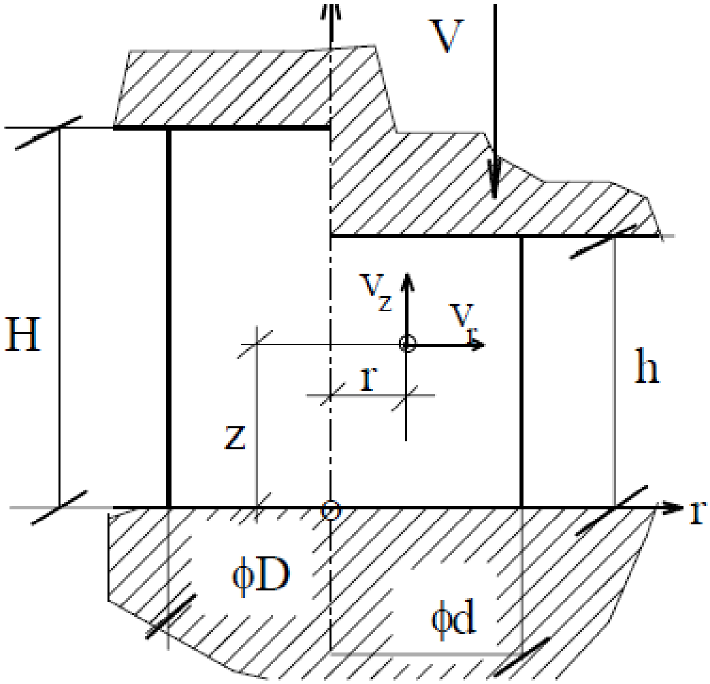
Peremfeltétel:

$$v = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix}$$

$r = 0 \quad v_r = 0$

$f(C, z) = 0$

$$v_r = \frac{v}{2h} r$$



$$\dot{\varphi}_{rr} = \frac{v}{2h} \qquad \dot{\varphi}_{\theta\theta} = \frac{v}{2h} \qquad \dot{\varphi}_{zz} = -\frac{v}{h}$$

$$\dot{\varphi}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\dot{\varphi}_{rr}^2 + \dot{\varphi}_{\theta\theta}^2 + \dot{\varphi}_{zz}^2\right)} = \frac{v}{h}$$

Ha $v = -\frac{dh}{dt}$ és $h_{t=0} = H$ akkor

$$\varphi_{eq} = \int_0^t \dot{\varphi}^{eq}\, dt = \int_0^t -\frac{dh}{dt}\frac{1}{h}\, dt = \int_H^h -\frac{dh}{h} = \ln\frac{H}{h}$$

Hengeres tömör test zömítése

Belső erők teljesítménye

Kudo súrlódási modell

$$\dot{W}_i = \int_V k_f \dot{\varphi}_{eq} dV = k_f \frac{v}{h} r_k^2 \pi h = v k_f r_k^2 \pi$$

$$v_r = \frac{v}{2h} r$$

Súrlódó erők teljesítménye

$$\dot{W}_S = \int_{A_S} \tau |\Delta v| dA_S = 2\int_0^{r_k} \tau\, v_r\; 2\pi r\, dr = 2\int_0^{r_k} m \frac{k_f}{\sqrt{3}}\; \frac{v}{2h} r\; 2\pi r dr = \frac{2}{3}\pi m \frac{k_f}{\sqrt{3}} \frac{v}{h} r_k^3$$

A külső kényszerek teljesítménye Fv így:

$$J^* = \dot{W}_i + \dot{W}_S = Fv \rightarrow F = \pi r_k^2 k_f \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} m \frac{r_k}{h}\right)$$

A zömítéshez szükséges nyomás:

$$p = \frac{F}{A} = k_f \left(1 + \frac{m}{3\sqrt{3}} \frac{d_k}{h}\right)$$

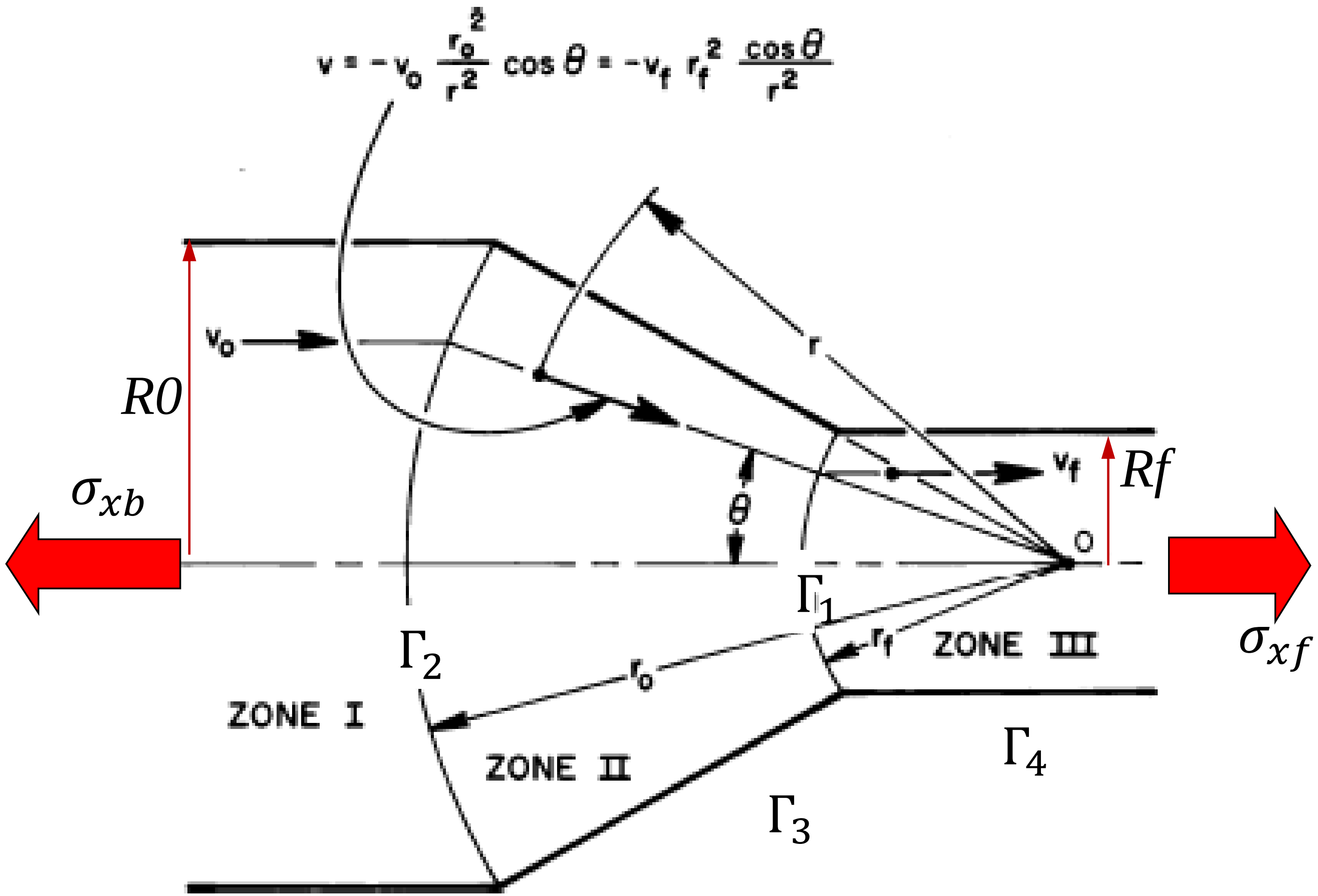
Teljesítmény = feszültség x alakv. sebesség

= erő x sebesség

Az energetikai módszer fő lépései

1. A jellemző folyási kép alapján a sebességvektor egyik komponensének meghatározása.
2. Az anyag összenyomhatatlansága alapján a sebességmező többi komponensének meghatározása (differenciálegyenlet megoldása).
3. A kinematikailag lehetséges alakváltozási sebességmező előállítása.
4. A belső erők teljesítményének, a szakadó felületek teljesítményének felírása.
5. A funkcionál szélsőértékének meghatározása.

Kiegészítő anyag



Anyagáramlás kúpos csatornában

Gömbi koordináta-rendszerben (*r*,*φ*, *θ*)

$$v_r = -v_f r_f^2 \frac{\cos\theta}{r^2},$$
$$v_\phi = v_\theta = 0$$

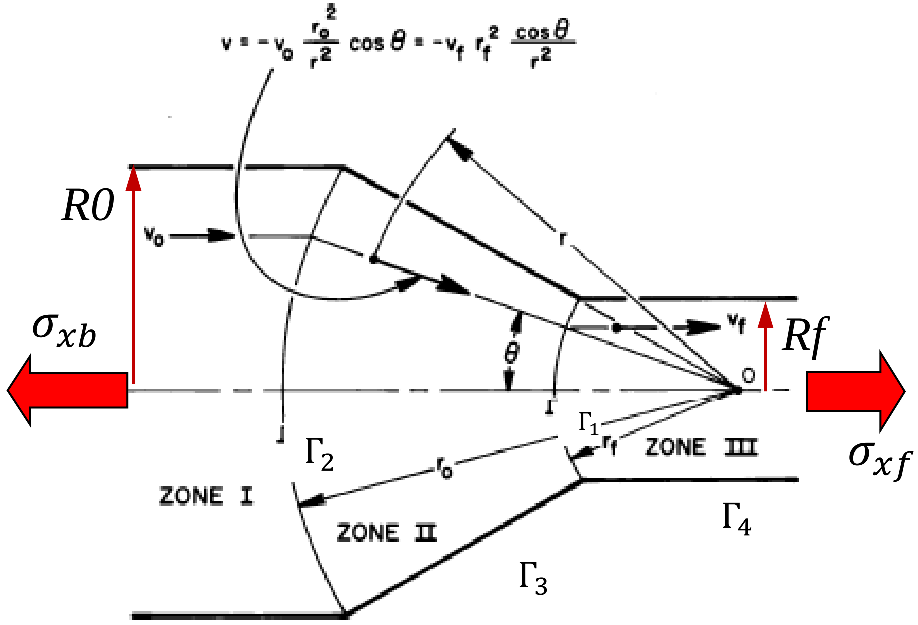
Szakadófelületek:

$\Gamma_1 : \Delta v = v_f \sin\theta$

$\Gamma_2 : \Delta v = v_0 \sin\theta$

$\Gamma_3 : \Delta v = v_f r_f^2 \frac{\cos\theta}{r^2}$

$\Gamma_4 : \Delta v = v_f$



Gömbi kr.–ben:

$$\dot{\varphi}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$
$$\dot{\varphi}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)$$
$$\dot{\varphi}_{\phi\phi} = \frac{1}{r sin\theta}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r sin\theta + v_\theta sin\theta\right)$$

$$\dot{\varphi}_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$
$$\dot{\varphi}_{\theta\phi} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - v_\phi \cot\theta\right)$$
$$\dot{\varphi}_{\phi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right)$$

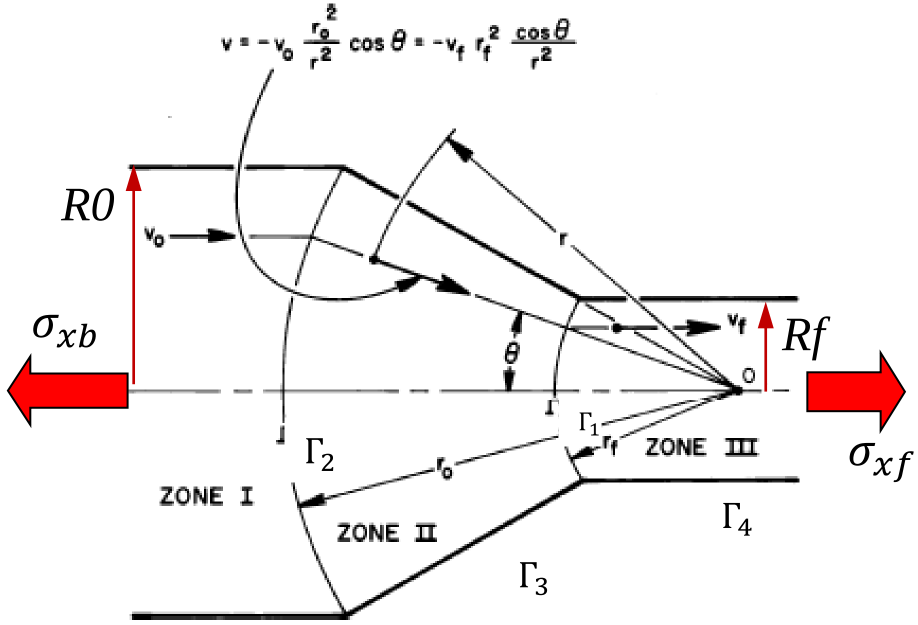
Anyagáramlás kúpos csatornában

A nem-zérus tagok:

$$\dot{\varphi}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\dot{\varphi}_{\theta\theta} = \dot{\varphi}_{\phi\phi} = \frac{v_r}{r}$$

$$\dot{\varphi}_{r\theta} = \frac{1}{2r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$



Összenyomhatatlanság:

$$\dot{\varphi}_{rr} + \dot{\varphi}_{\phi\phi} + \dot{\varphi}_{\theta\theta} = 0$$

$$\dot{\varphi}_{rr} = -2\dot{\varphi}_{\phi\phi} = -2\dot{\varphi}_{\theta\theta} = 2v_f r_f^2 \frac{\cos\theta}{r^3}$$

Alakváltozás:

$$\dot{\varphi}_{kúp}^{eq} = 2v_f r_f^2 \frac{1}{r^3}\sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\theta}$$

$$\varphi_{kúp}^{eq} = \int_0^t \dot{\varphi}^{eq} dt = 2\frac{\sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\theta}}{\cos\theta}\ln\frac{r_0}{r}$$

Anyagáramlás kúpos csatornában

$$J^* = \int_V k_f \dot{\varphi}^{eq} dV + \int_{A_\Gamma} \tau |\Delta v| dA_\Gamma = \int_{A_t} T_i\, v_i$$

Belső erők teljesítménye

$$\dot{W}_i = 2\pi k_f v_f r_f^2 f(\alpha) \ln \frac{r_0}{r_f} = 2\pi k_f v_f R_f^2 f(\alpha) \ln \frac{R_0}{R_f}$$

Az r és R közötti kapcsolatot az $f(\alpha)$ adja meg:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[1 - \cos\alpha \sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\alpha} + + \frac{1}{11 \cdot 12} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{11}{12}}}{\sqrt{\frac{11}{12}}\cos\alpha + \sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\alpha}}\right]$$

Szakadófelületi erők teljesítménye

$$\dot{W}_{A_\Gamma} = \dot{W}_{\Gamma_{1,2}} + \dot{W}_{\Gamma_3} + \dot{W}_{\Gamma_4} = \frac{2}{\sqrt{3}} k_f \pi v_f R_f^2 \left[\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} - \cot\alpha + m \cot\alpha \ln \frac{R_0}{R_f} + m \frac{L}{R_f}\right]$$

A külső kényszerek teljesítménye:

húzásnál: $$F_{húzás} v_f - F_{feszítés} v_0 = \sigma_{xf} 2\pi R_f^2 v_f - \sigma_{xb} 2\pi R_0^2 v_0$$

sajtolásnál: $$F_{sajtolás} v_0 - F_{ellennyomás} v_f = \sigma_{xb} 2\pi R_0^2 v_0 - \sigma_{xf} 2\pi R_f^2 v_f$$

Anyagáramlás kúpos csatornában

$J^* = \dot{W}_i + \dot{W}_\Gamma = \dot{W}_t$ Mindkét oldalt elosztva k_f-fel és a felülettel:

húzásnál: $$\frac{\sigma_{xf}}{k_f} = \frac{\sigma_{xb}}{k_f} + 2f(\alpha)\ln\frac{R_0}{R_f} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} - \cot\alpha - m\cot\alpha\ln\frac{R_0}{R_f} + m\frac{L}{R_f}\right]$$

sajtolásnál: $$\frac{\sigma_{xb}}{k_f} = \frac{\sigma_{xf}}{k_f} - 2f(\alpha)\ln\frac{R_0}{R_f} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} - \cot\alpha - m\cot\alpha\ln\frac{R_0}{R_f} + m\frac{L}{R_f}\right]$$

Alakváltozás szakadófelületen:

$$\Delta\varphi^{eq} = \frac{|\Delta v|}{\sqrt{3}(v_n - v_{ns})} \qquad \Delta\varphi^{eq}{}_0 = \Delta\varphi^{eq}{}_f = \frac{v_0\sin\theta}{\sqrt{3}v_0\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}$$

Alakváltozás:

$$\text{I.zóna } \varphi^{eq} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta + \varphi^{eq}_{kúp}$$

$$\text{II.zóna } \varphi^{eq} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta + \varphi^{eq}_{kúp}\Big|_{r=r_f} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\alpha$$