

# Zömítés Előre folytatás

Alakítótechnológiák elmélete  
(BMEGEMTNG00)

- Zömítés
- Anyagáramlás kúpos csatornában:
  - Redukálás
  - Előrefolyatás
  - Rúd és huzalhúzás

Az alakítás erőszükséglete:

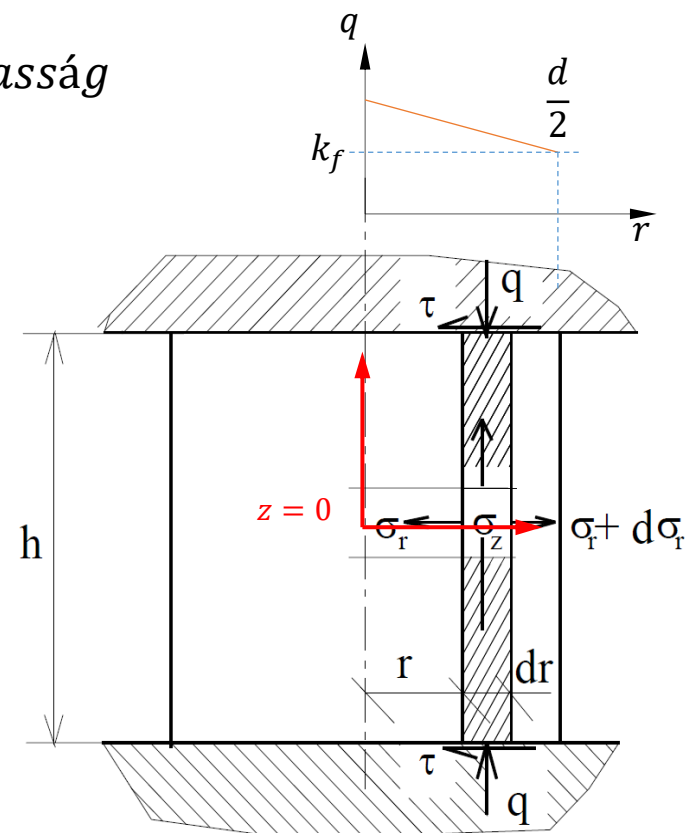
$$F = k_f \frac{d^2 \pi}{4} \left[ 1 + \frac{m d}{\sqrt{3} 3h} \right]$$

*aktuális átmérő és magasság*

$k_f(\varphi)$  *Kudo súrlódási együttható*

Nyomáseloszlás  
a felületen:

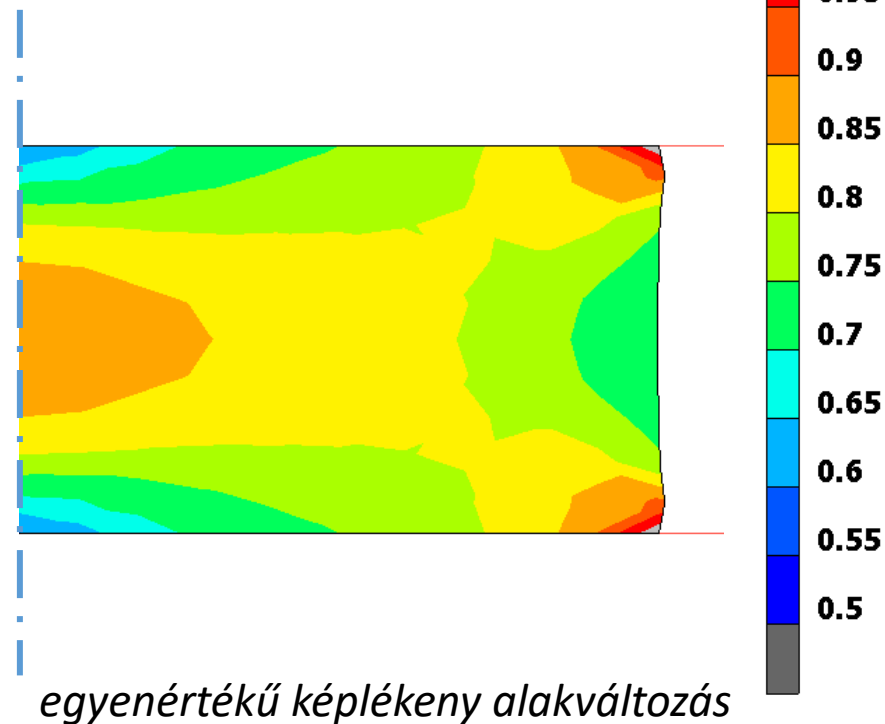
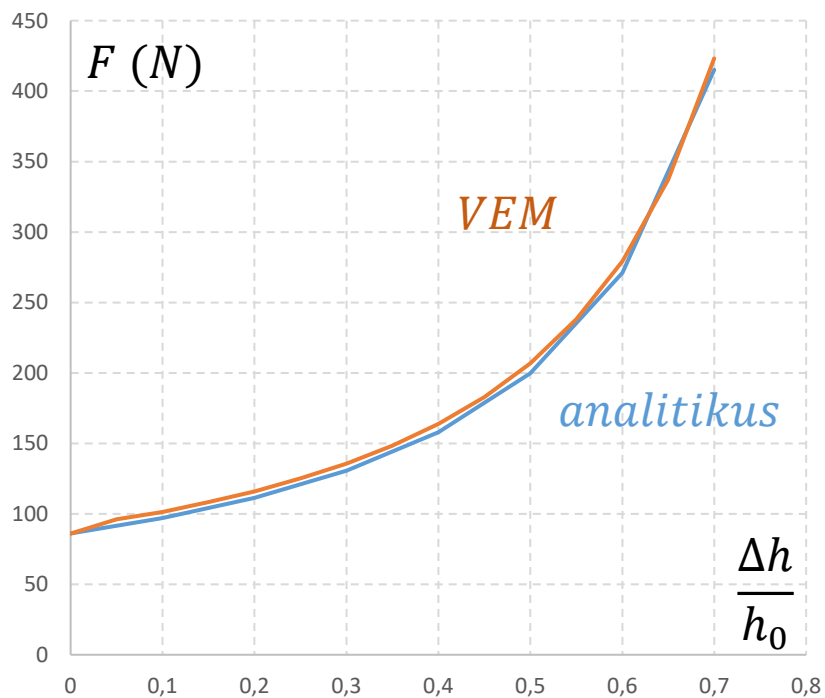
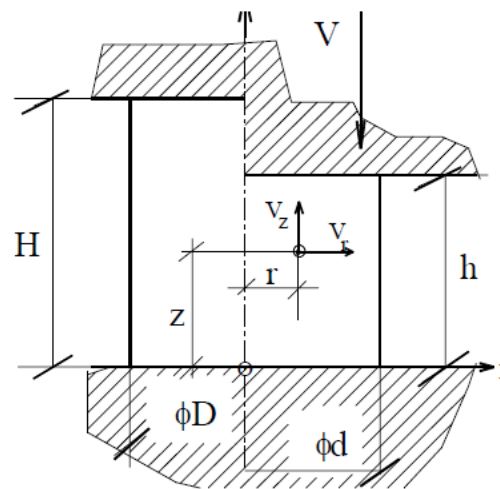
$$q = k_f \left[ 1 + \frac{m 2}{\sqrt{3} h} \left( \frac{d}{2} - r \right) \right]$$

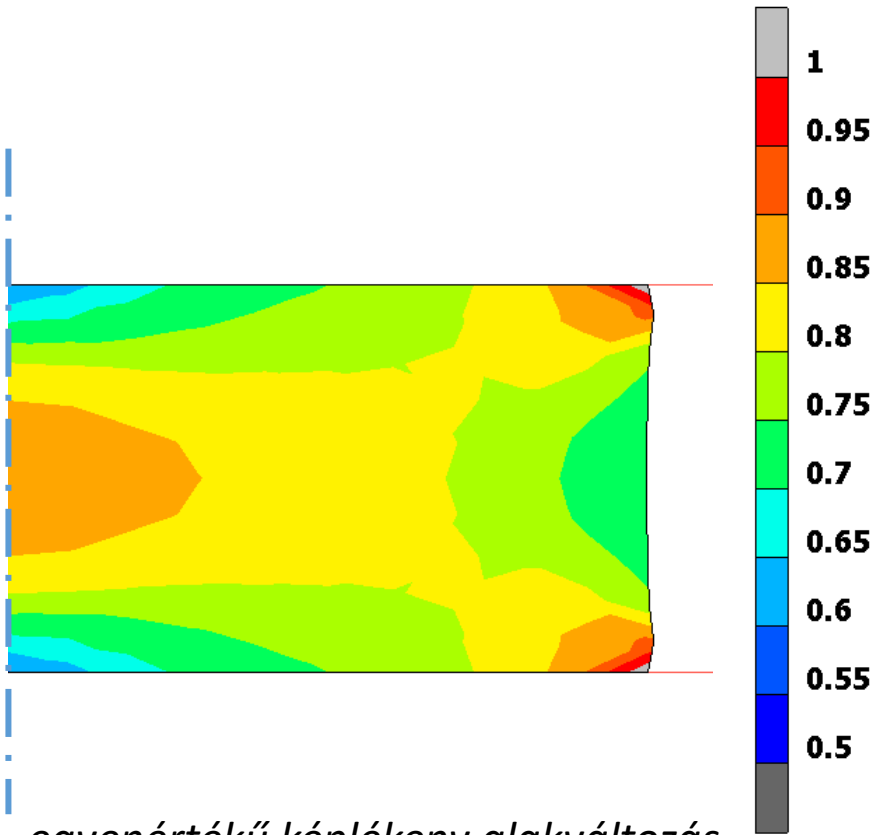


Az alakítási ellenállás:

$$p = \frac{F}{A} = k_f \left[ 1 + \frac{m d}{\sqrt{3} 3h} \right]$$

$D = 10 \text{ mm}$   
 $H = 10 \text{ mm}$   
 $k_f = \text{állandó} = 100 \text{ MPa}$   
 $m = 0,5$

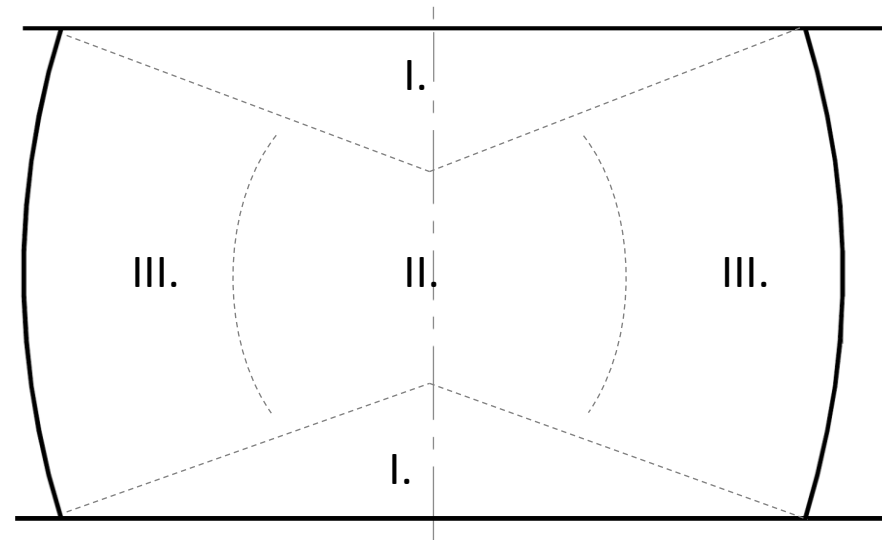


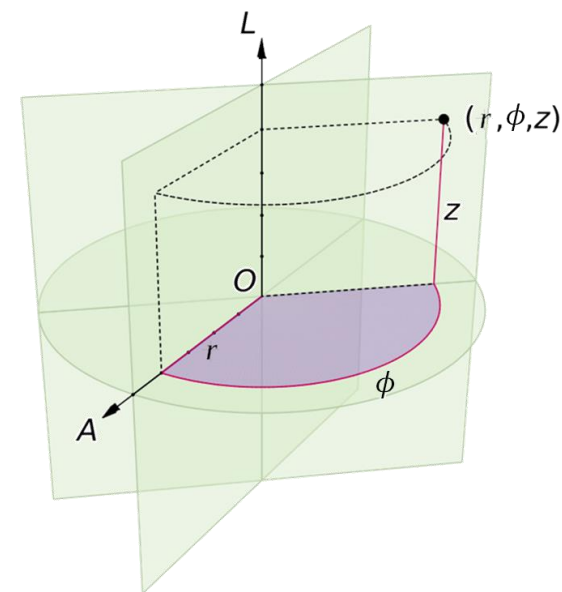
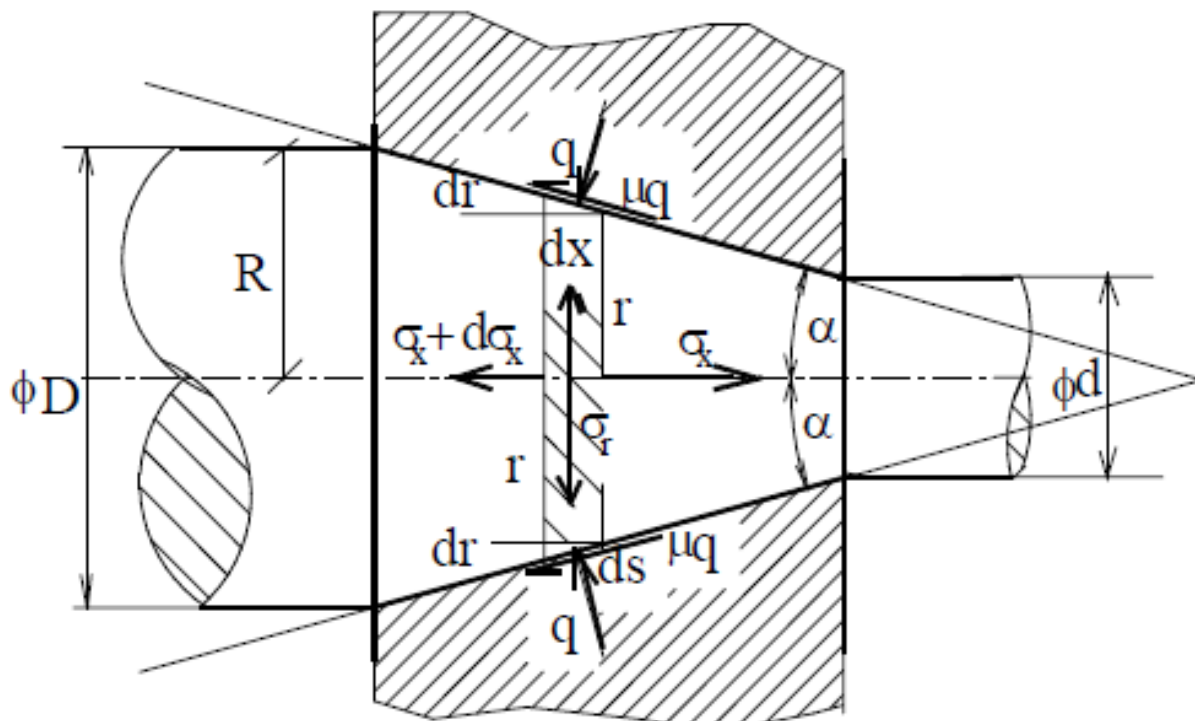


*egyenértékű képlékeny alakváltozás*

Analitikus modell:

$$\varphi^{eq} = \ln \frac{H}{h} = \text{homogén}$$





Coulomb súrlódási modell

Hengerkoordináta rendszer

Előrefolytatás, redukálás és rúd és huzalhúzás alapproblémája

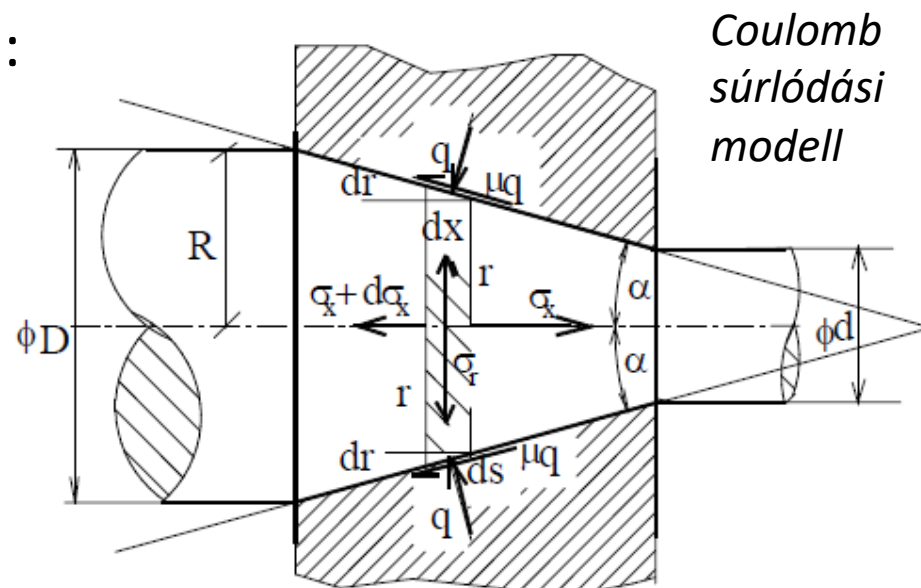
Statikai elemzés (egyensúlyi egyenletek):

$$ds = \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{dr}{\sin \alpha}$$

egyensúlyi egyenlet a radiális irányban:

$$2r\pi \left( \sigma_r dx + q \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \alpha - \mu q \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \alpha \right) = 0$$

amiből:  $\sigma_r + q(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) = 0$   
 mivel  $\mu \operatorname{tg} \alpha \ll 1$  így  $\sigma_r + q \approx 0$  (1)

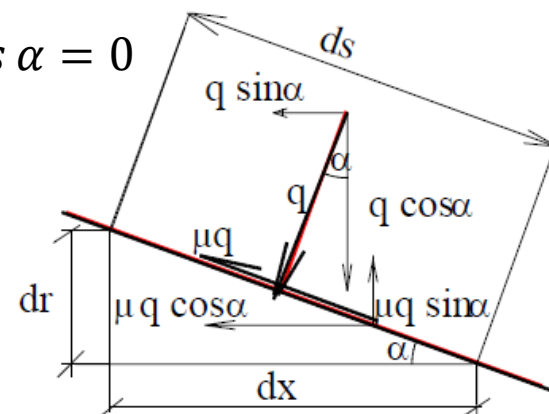


egyensúlyi egyenlet az x irányban:

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(r + dr)^2 \pi - \sigma_x r^2 \pi + 2r\pi \frac{dr}{\sin \alpha} q \sin \alpha + 2r\pi \frac{dr}{\sin \alpha} \mu q \cos \alpha = 0$$

egyszerűsítések:

$dr^2$  és  $d\sigma_x dr$  elhanyagolhatóan kicsik



Az egyensúlyi egyenletből, az egyszerűsítések után  
következik:

$$\sigma_x 2r dr + d\sigma_x r^2 + 2r dr q \left( 1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = 0$$

Az alakváltozások:

$$\varphi_r = \ln \frac{r}{R}$$

$$\varphi_\theta = \ln \frac{2r\pi}{2R\pi} = \ln \frac{r}{R}$$

térfogatállandóság

$$\varphi_r + \varphi_\theta + \varphi_x = 0$$

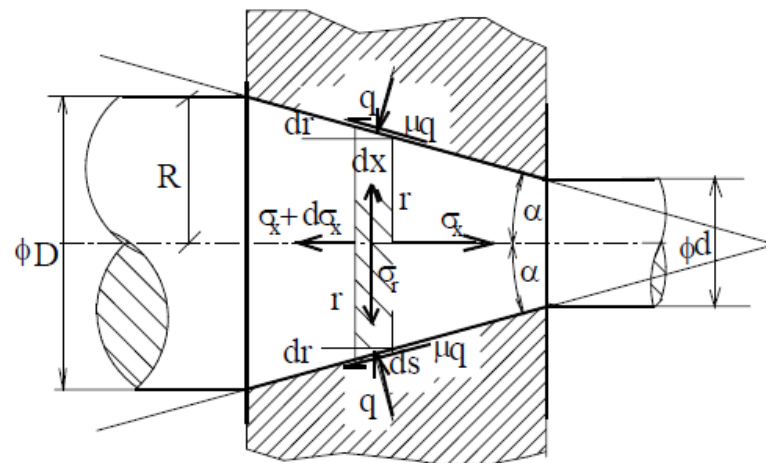
$$\varphi_x = 2 \ln \frac{R}{r}$$

$$\varphi_{eq} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{2} (\varphi_r^2 + \varphi_\theta^2 + \varphi_x^2)} = 2 \ln \frac{R}{r}$$

$$\varphi_r = \varphi_\theta$$

$$\dot{\varphi}_r = \dot{\varphi}_\theta$$

ezt felhasználjuk...





Lévy-Mises egyenlet a radiális és a tangenciális irányra:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_r &= \dot{\lambda} \sigma'_r = \dot{\lambda}(\sigma_r - \sigma_{hidr.}) \\ \dot{\varphi}_\theta &= \dot{\lambda} \sigma'_\theta = \dot{\lambda}(\sigma_\theta - \sigma_{hidr.}) \end{aligned} \quad \xrightarrow{\dot{\varphi}_r = \dot{\varphi}_\theta} \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_r &= \dot{\varphi}_\theta = \dot{\lambda}(\sigma_r - \sigma_{hidr.}) = \dot{\lambda}(\sigma_\theta - \sigma_{hidr.}) \\ (\sigma_r - \sigma_{hidr.}) &= (\sigma_\theta - \sigma_{hidr.}) \\ \sigma_r &= \sigma_\theta \quad (2) \end{aligned}$$

A Mises-féle folyási feltétel:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_r)^2 = 2k_f^2$$

*A csúsztató feszültségeket elhanyagoltuk. A következményét lásd később...*

$$\xrightarrow{\text{Fenti}} \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_r &= k_f \\ \sigma_x + q &= k_f \end{aligned}$$

összefüggésekkel  
(1)(2)

$$q = k_f - \sigma_x$$

$r$  helyett használjuk a  $\varphi_{eq}$  egyenértékű alakváltozást mint változót:

$$\varphi_{eq} = 2 \ln \frac{R}{r} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\varphi_{eq}}{dr} = -\frac{2}{r} \quad \longrightarrow \quad 2dr = -rd\varphi_{eq}$$

Az egyensúlyi egyenletből, az egyszerűsítések után ez következik:

$$\sigma_x 2r dr + d\sigma_x r^2 + 2r dr q \left(1 + \frac{\mu}{\tan \alpha}\right) = 0$$

$$-\sigma_x r^2 d\varphi_{eq} + d\sigma_x r^2 - r^2 d\varphi_{eq} q \left(1 + \frac{\mu}{\text{tg } \alpha}\right) = 0$$

$$-\sigma_x r^2 d\varphi_{eq} + d\sigma_x r^2 - r^2 d\varphi_{eq} (k_f - \sigma_x) \left(1 + \frac{\mu}{\text{tg } \alpha}\right) = 0$$

$$\frac{d\sigma_x}{d\varphi_{eq}} + \sigma_x \frac{\mu}{\text{tg } \alpha} - k_f \left(1 + \frac{\mu}{\text{tg } \alpha}\right) = 0$$

*Ez a folyamat differenciálegyenlete*

$$\text{legyen } \frac{\mu}{\text{tg } \alpha} = B \text{ így}$$

$$\frac{d\sigma_x}{d\varphi_{eq}} + \sigma_x B - k_f (1 + B) = 0$$

$$\frac{d\sigma_x}{d\varphi_{eq}} + \sigma_x B - k_f(1 + B) = 0$$

Az alakítási szilárdságot konstans értékkel, a közepes alakítási szilárdsággal jellemezzük.  $k_{fm} = \text{állandó}$

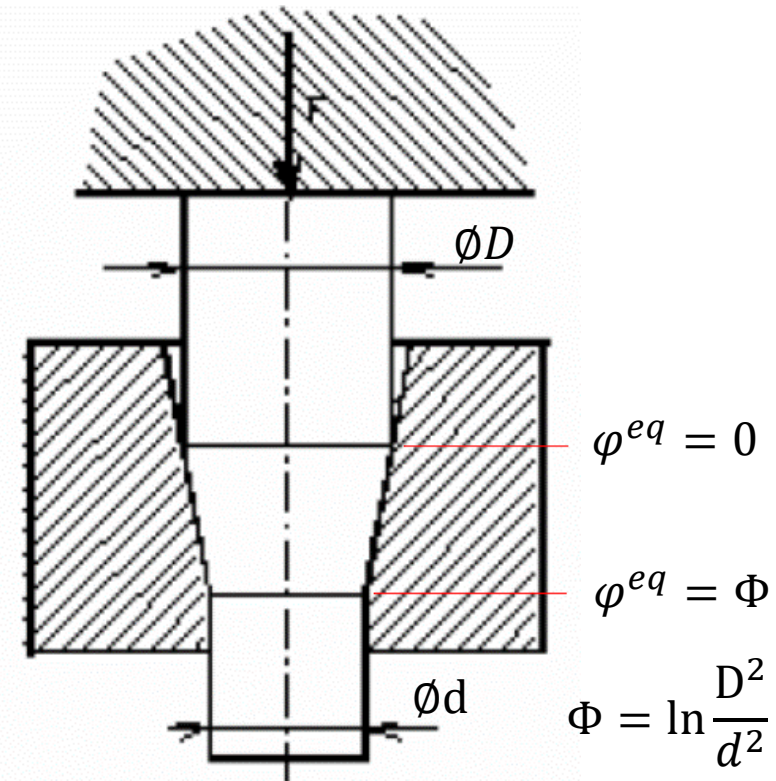
A megoldás:

$$\sigma_x(\varphi_{eq}) = k_{fm} \left(1 + \frac{1}{B}\right) + C e^{-B\varphi_{eq}}$$

Peremfeltétel: redukálás esetében a kilépő keresztmetszetben  $\sigma_x = 0$ .

$$C = -k_{fm} \left(1 + \frac{1}{B}\right) e^{B\Phi}$$

$$\sigma_x(\varphi_{eq}) = -k_{fm} \left(1 + \frac{1}{B}\right) (e^{B(\Phi - \varphi_{eq})} - 1) \xrightarrow[\varphi_{eq} = 0\text{-nál}]{\text{Maximum:}} \sigma_{x \max} = -k_{fm} \left(1 + \frac{1}{B}\right) (e^{B\Phi} - 1)$$



Ez az eredmény valamivel kisebb feszültséget ad, mint a valóságban mért értékek. A korrekciót az eddig elhanyagolt csúsztató feszültségek figyelembe vételével lehet kompenzálni.

A csúsztató feszültségek figyelembe vétele.

Az alakváltozási zónába való be és kilépéskor az anyagi szálak  $\gamma$  szöggel megtörnek.

Ehhez a  $\gamma$  nyíráshoz  $\tau_{fm} = \frac{k_{fm}}{\sqrt{3}}$  csúsztató feszültségre van szükség. Ez a nyírás  $\gamma\tau_{fm}$  munkát igényel térfogategységenként.

$$w = \int_0^R \gamma \tau_{fm} 2r\pi dr dx$$

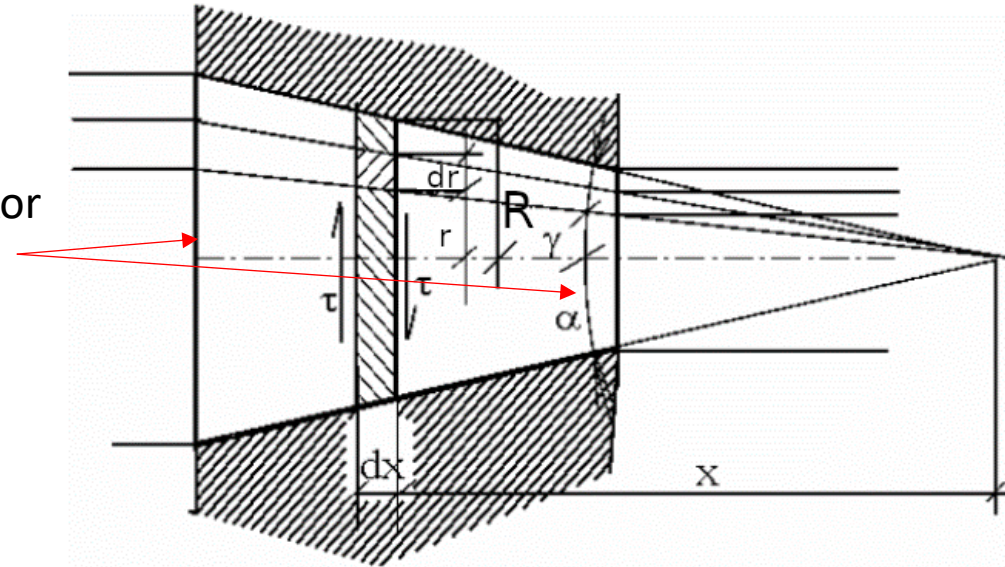
$\gamma = \alpha \frac{r}{x}$  összefüggést felhasználva

$$w = \int_0^R \alpha \frac{r}{x} \frac{k_{fm}}{\sqrt{3}} 2r\pi dr dx = \alpha \frac{R^2}{3} \frac{k_{fm}}{\sqrt{3}} 2\pi dx$$

Ezt a munkát egy  $x$  irányú  $\sigma_x$  feszültség végzi el  $dx$  úton.

$$\alpha \frac{R^2}{3} \frac{k_{fm}}{\sqrt{3}} 2\pi dx = \sigma_x R^2 \pi dx \longrightarrow \sigma_x = 2 \frac{k_{fm}}{\sqrt{3}} \alpha \frac{2}{3} \approx 0,77 k_{fm} \alpha$$

2-szer: egyszer a belepésnél és még egyszer a kilépésnél.



A redukálás alakítási ellenállása így:

$$\sigma_{x \max} = -k_{fm} \left( 1 + \frac{1}{B} \right) (e^{B\Phi} - 1) - 0,77k_{fm}\alpha$$

$$e^{B\Phi} \approx 1 + B\Phi$$

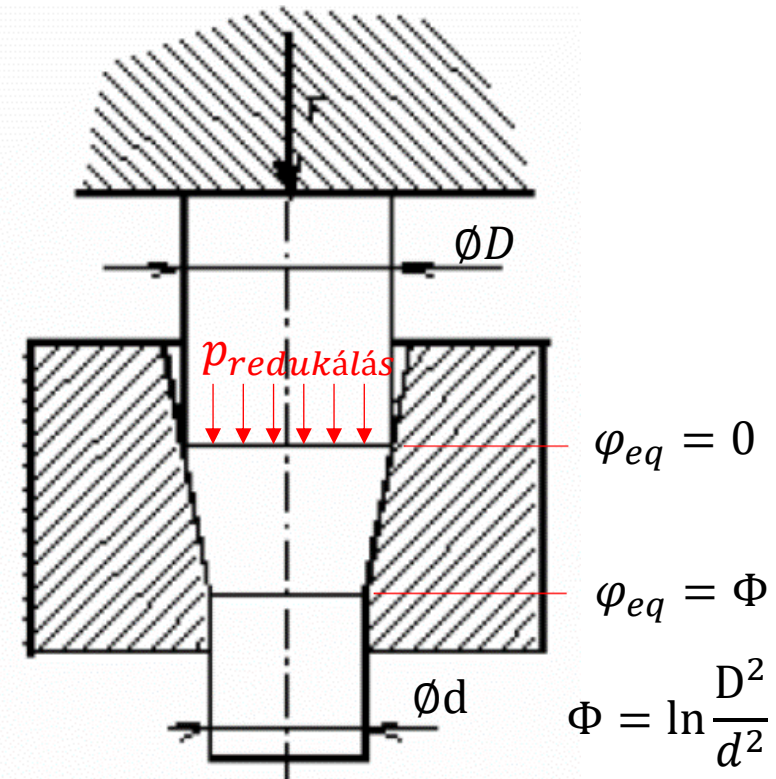
$$B = \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{\mu}{\alpha}$$

$$p_{\text{redukálás}} = k_{fm} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) \Phi + 0,77k_{fm}\alpha$$

A matrica falára ható nyomás:

$$q_{\max} = k_f - \sigma_{x \max} \approx k_{fm} + p_{\text{redukálás}}$$

Az  $\varphi_{eq} = 0$  helyen, azaz a belépő keresztmetszetenél.



Az erőszükséglet:

$$F = p_{\text{redukálás}} \frac{D^2 \pi}{4}$$



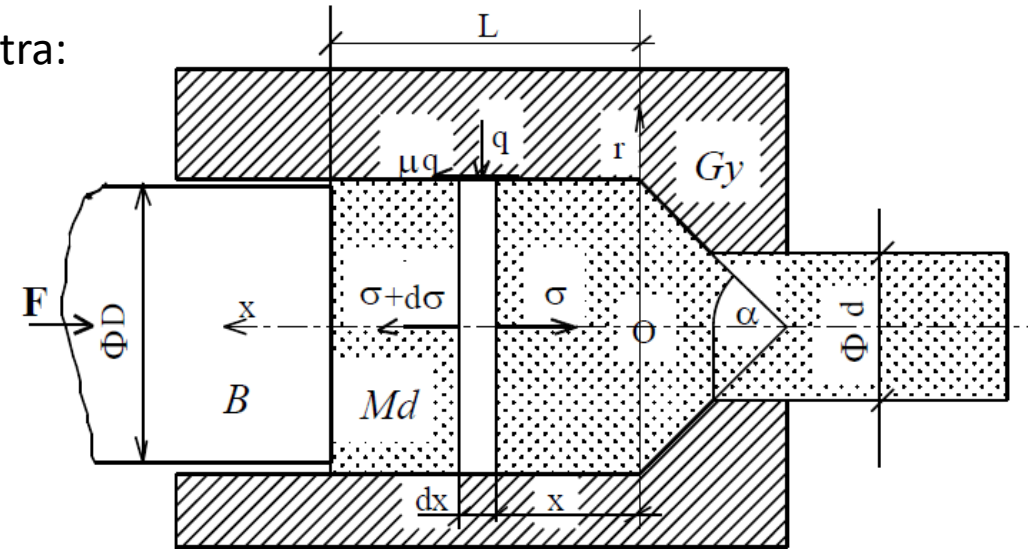
Egyensúlyi egyenlet a elemi  $dx$  vastagságú térfogatra:  
( $x$  irány)

$$(\sigma_x + d\sigma_x) \frac{D^2 \pi}{4} - \sigma_x \frac{D^2 \pi}{4} + \mu q D \pi dx = 0$$

A kúpos üreghez hasonló körülményeket feltételezve a folyási feltétel az alábbi összefüggést adja:

$$q = k_{f0} - \sigma_x$$

*kezdeti alakítási szilárdság (alakítatlan állapot)*



Behelyettesítve és rendezve az egyenletet:

$$\frac{d\sigma_x}{k_{f0} - \sigma_x} = \frac{4\mu}{D} dx \xrightarrow{\text{integrálva}} \ln(k_{f0} - \sigma_x) = \frac{4\mu}{D} x + C \xrightarrow[\sigma_{x,x=0} = -p_{\text{redukálás}}]{\text{peremfeltétel}} \ln(k_{f0} + p_{\text{redukálás}}) = C$$

$$k_{f0} - \sigma_x = e^{\frac{4\mu}{D}x + \ln(k_{f0} + p_{\text{redukálás}})}$$

$$k_{f0} - \sigma_x = (k_{f0} + p_{\text{redukálás}}) e^{\frac{4\mu}{D}x} \longrightarrow$$

$$-\sigma_x = (k_{f0} + p_{\text{redukálás}}) e^{\frac{4\mu}{D}x} - k_{f0}$$

Legnagyobb nyomás az  $x=L$  helyen lesz.

$$p_{ef} = -\sigma_{x x=L} = (k_{f0} + p_{redukálás}) e^{\frac{4\mu}{D}x} - k_{f0}$$

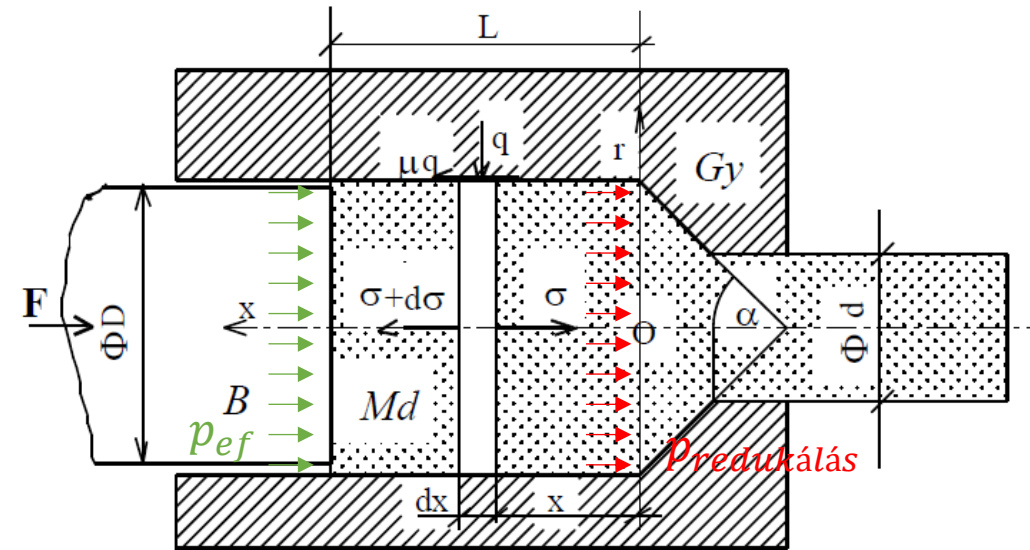
A matrica falára ható nyomás:

$$q_{max} = (k_{f0} + p_{redukálás}) e^{\frac{4\mu}{D}x}$$

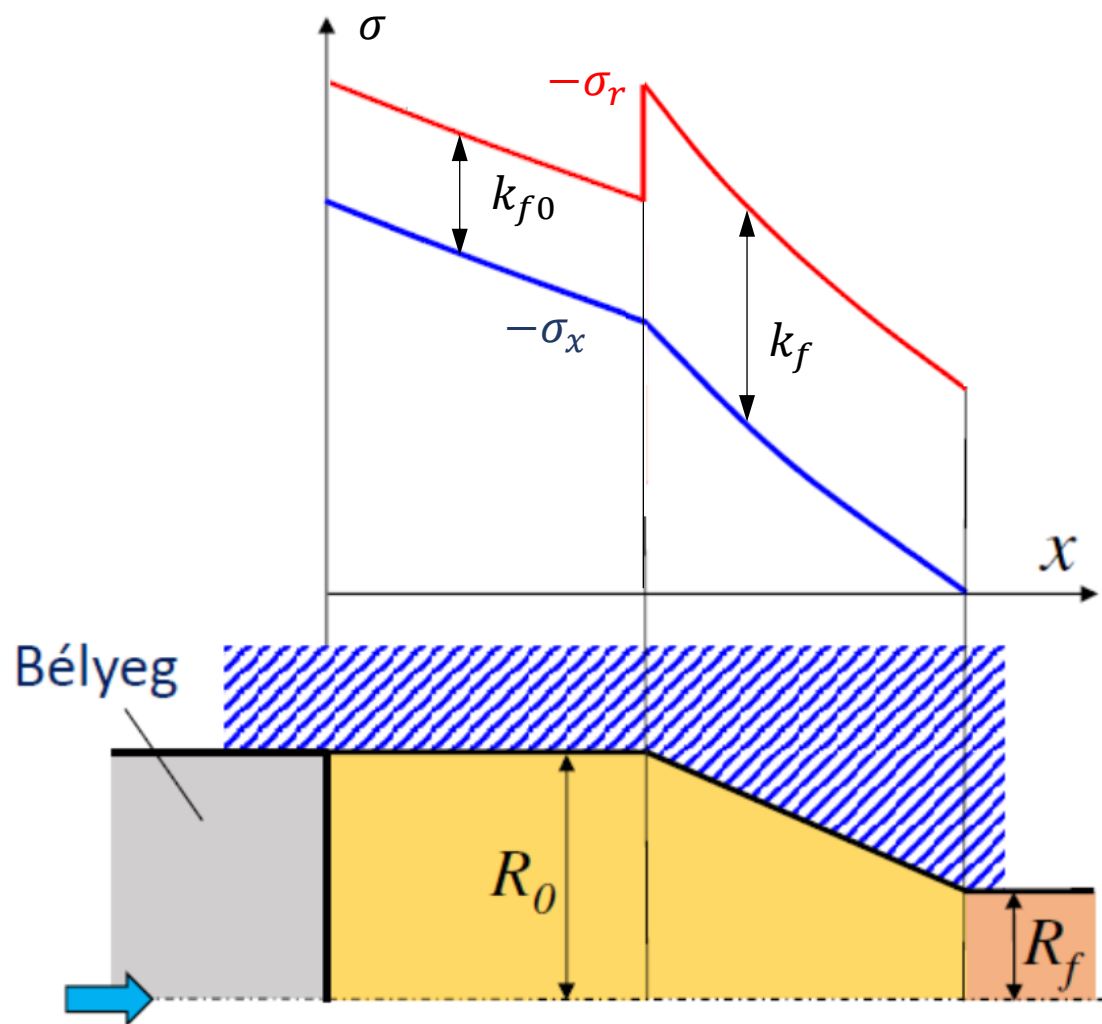
Szintén az  $x = L$  helyen.

Az erőszükséglet:

$$F = p_{ef} \frac{D^2 \pi}{4}$$



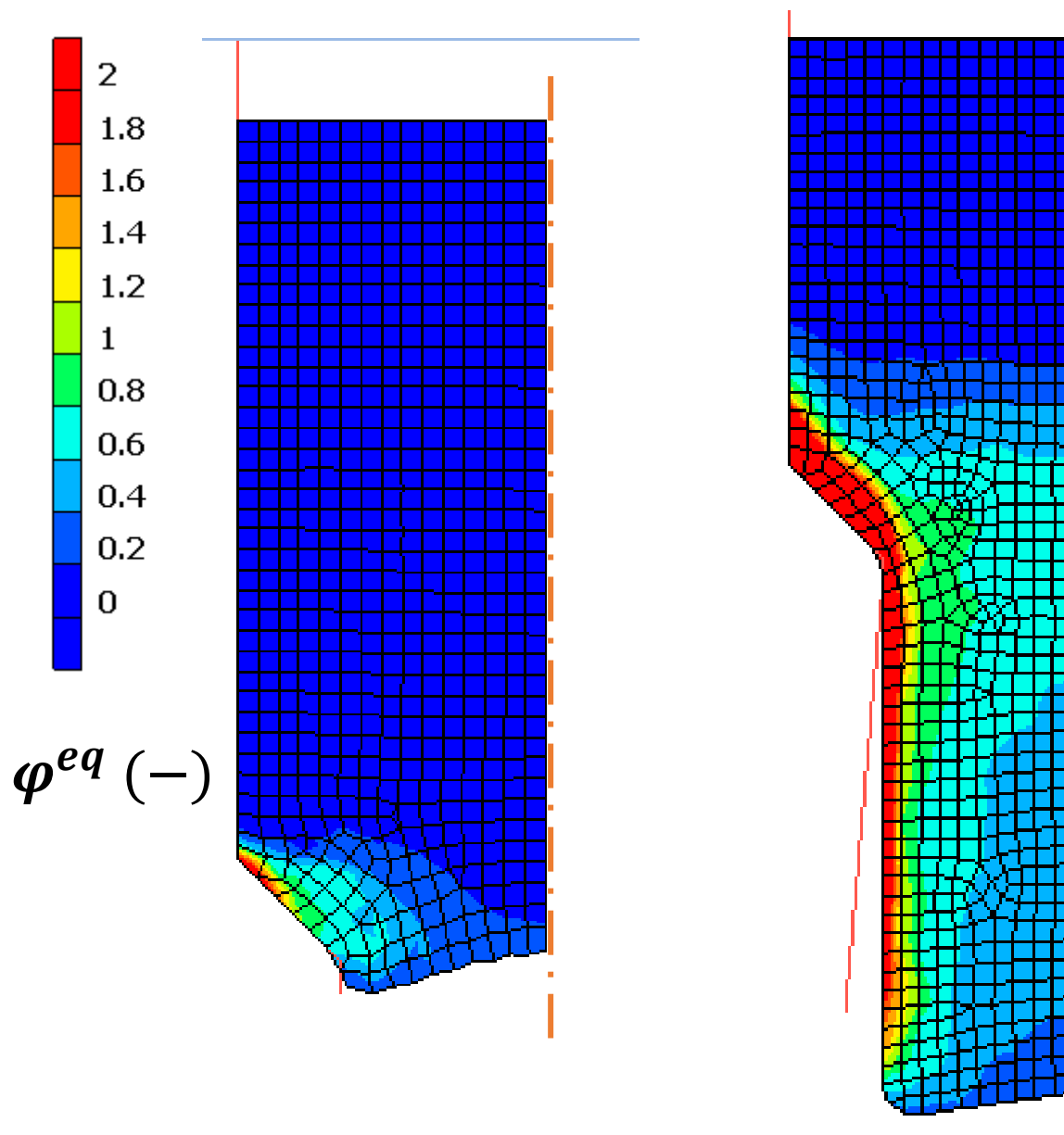
## Előrefolytatás feszültségeloszlása





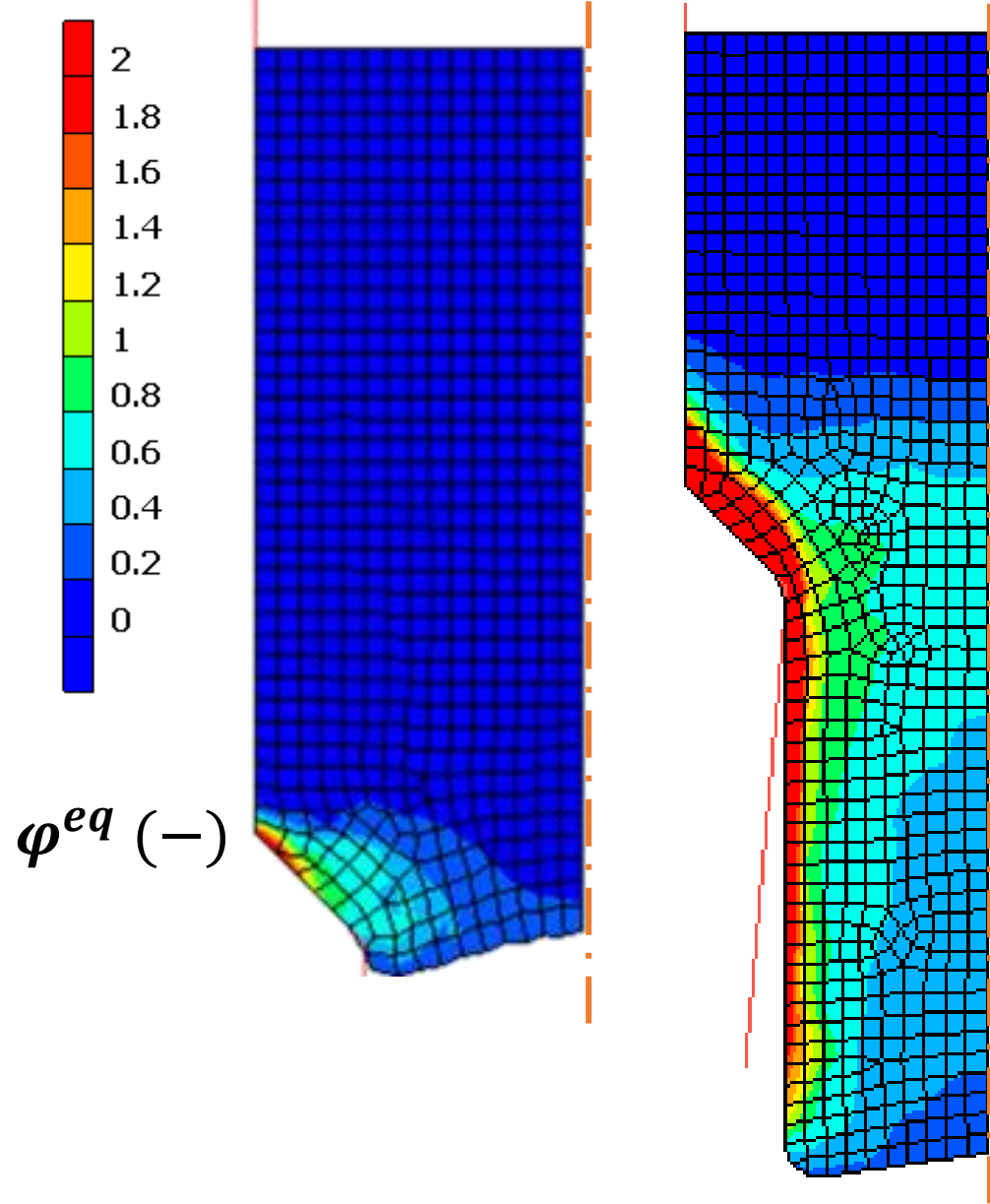
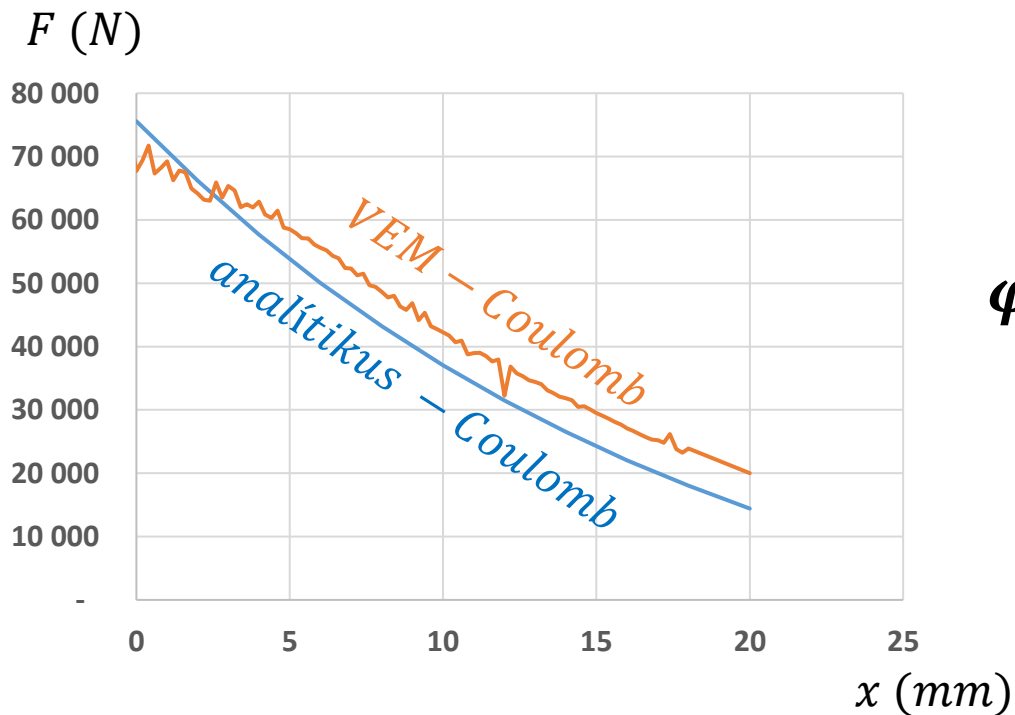
$D = 15 \text{ mm}$   
 $d = 10 \text{ mm}$   
 $\alpha = 45^\circ$   
 $k_{f0} = k_{fm} = 100 \text{ mm}$   
 $\mu = 0,2$   
 $L_{max} = 20 \text{ mm}$

$\varphi_{analitikus}^{eq} = 0,81$



$D = 15 \text{ mm}$   
 $d = 10 \text{ mm}$   
 $\alpha = 45^\circ$   
 $k_{f0} = k_{fm} = 100 \text{ mm}$   
 $\mu = 0,2$   
 $L_{max} = 20 \text{ mm}$

$$\varphi_{analitikus}^{eq} = 0,81$$



## A matrica falára ható nyomás és csúsztató feszültség

$$\sigma_f = 100 \text{ MPa} \quad \tau_f = 57 \text{ MPa}$$

Analitikus - Coulomb

VEM - Coulomb

VEM - Kudo

$$\frac{q = 525 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 105 \text{ MPa}}$$

$$\frac{q = 435 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 87 \text{ MPa}}$$

$$\frac{q = 200 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 29 \text{ MPa}}$$

$$\frac{q = 310 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 62 \text{ MPa}}$$

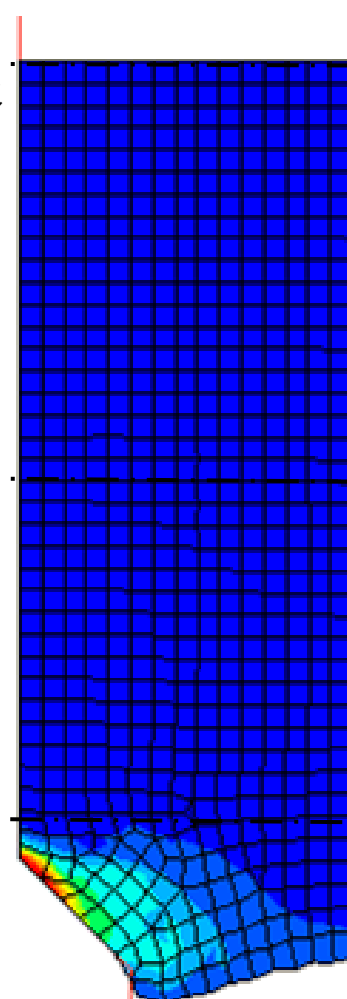
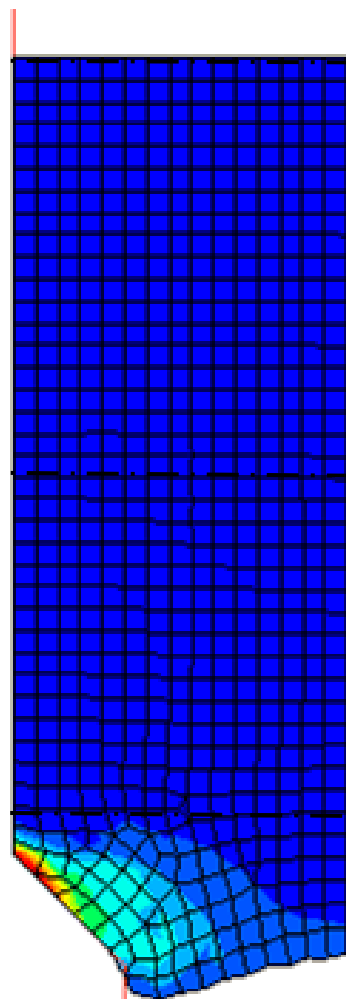
$$\frac{q = 254 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 51 \text{ MPa}}$$

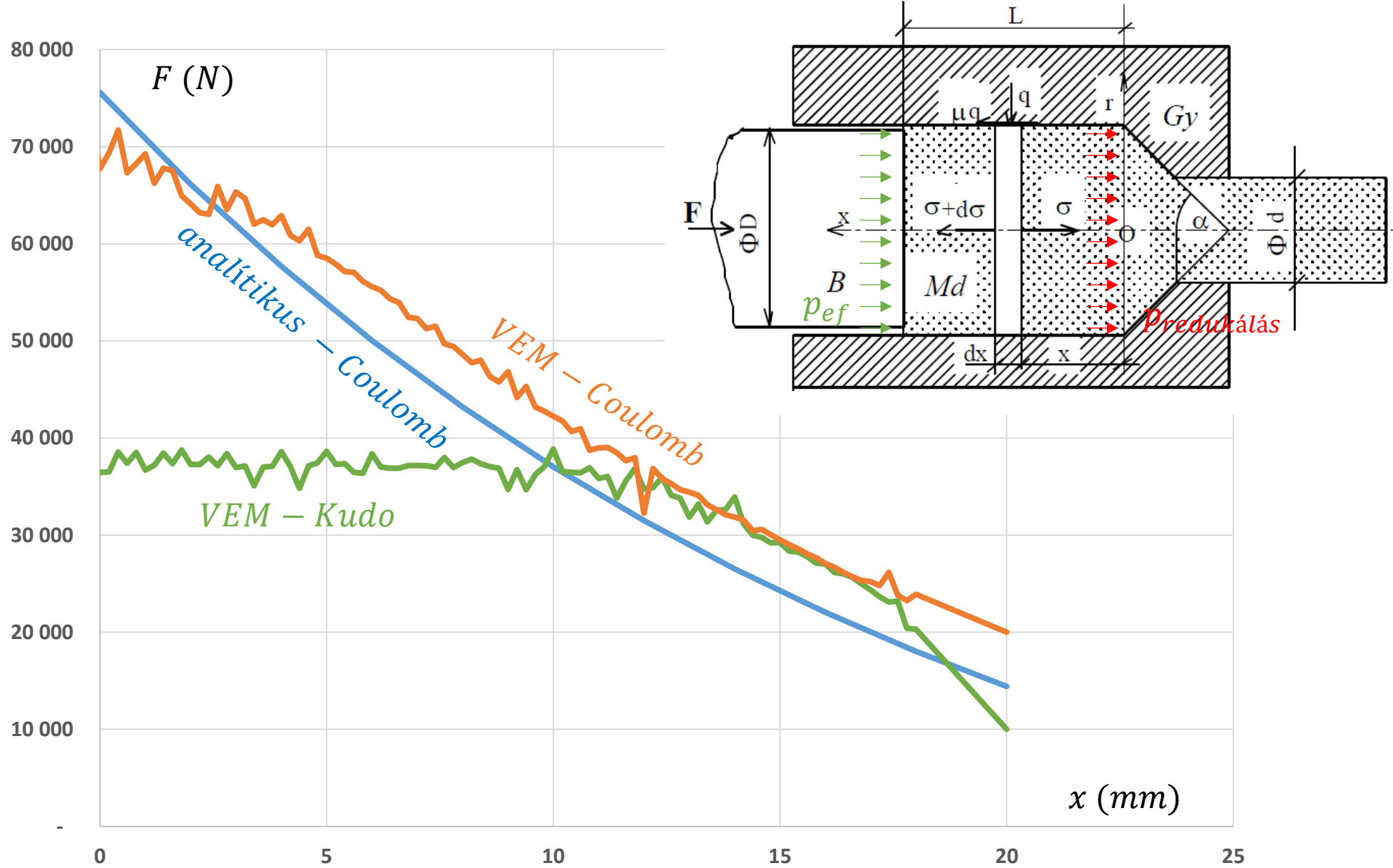
$$\frac{q = 195 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 29 \text{ MPa}}$$

$$\frac{q = 181 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 36 \text{ MPa}}$$

$$\frac{q = 196 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 39 \text{ MPa}}$$

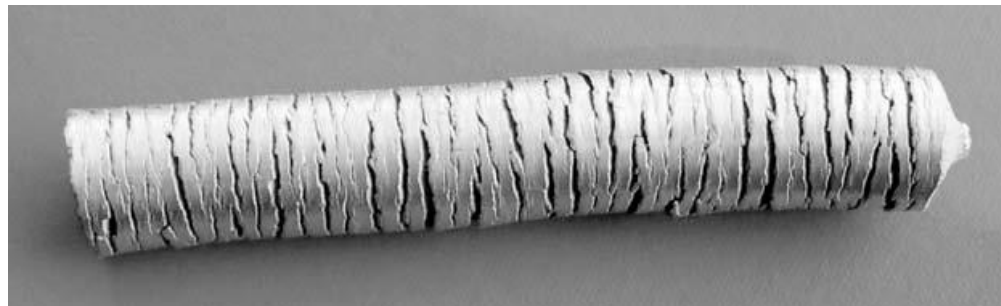
$$\frac{q = 100 \text{ MPa}}{\tau_{súrl} = 29 \text{ MPa}}$$





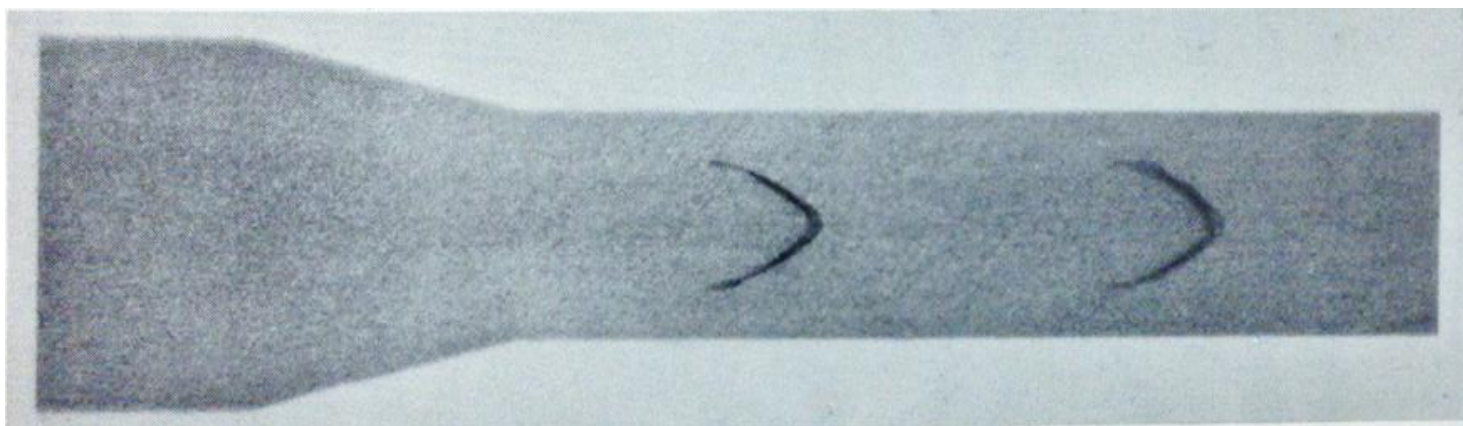
## Kigyóbőr (snake skin)

A darab belseje gyorsabban halad mint a darab felülete, ami felrepedezhet.



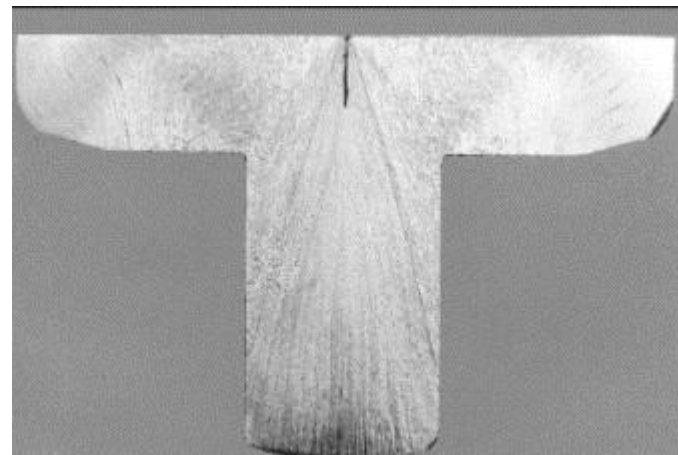
## Középponti repedés (central bursting)

A darab felülete gyorsabban halad, mint a darab belseje és ennek következtében belső repedés lép fel. Ugyanakkor az anyagáramlás viszonyai pillanatszerűen változnak.



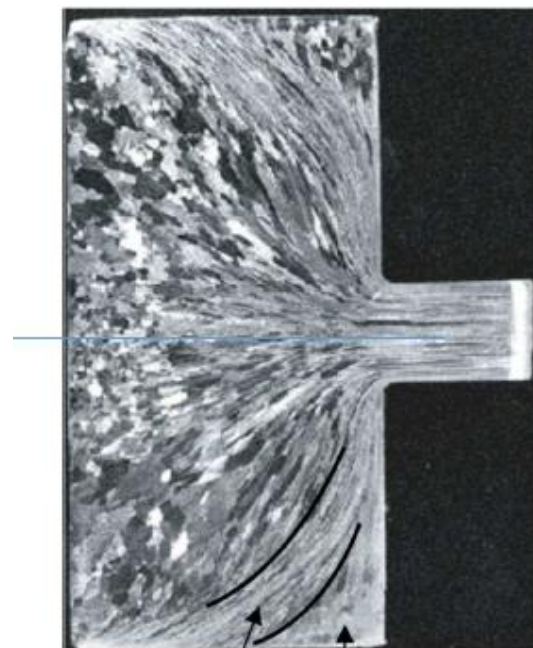
## Üreg (cavity)

A darab hátsó felületén kisméretű beszívódás keletkezik, ami gyorsan növekszik, és csőszerű alakot vesz fel. A szerszám szögének csökkenésével az anyagáramlás egyenletesebbé válik, és az üregképződés veszélye csökken.



## Merev zóna (dead zone)

A darab belsejében a szerszámszögnél kisebb szögnél kialakul egy belső nyírt felület, amihez tapad az áramló anyag, és a két szög közötti térfogatban nincs alakváltozás.



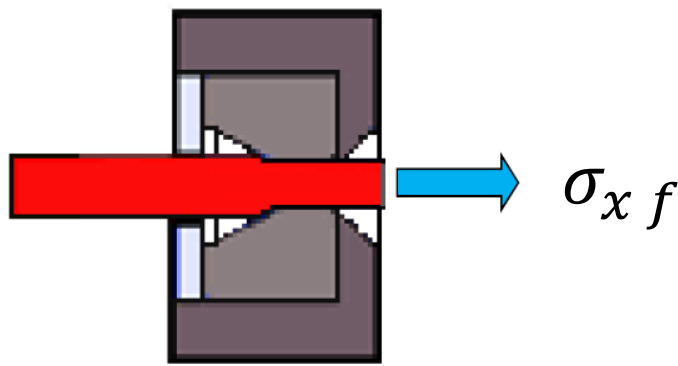
Nyírt zóna

Merev zóna

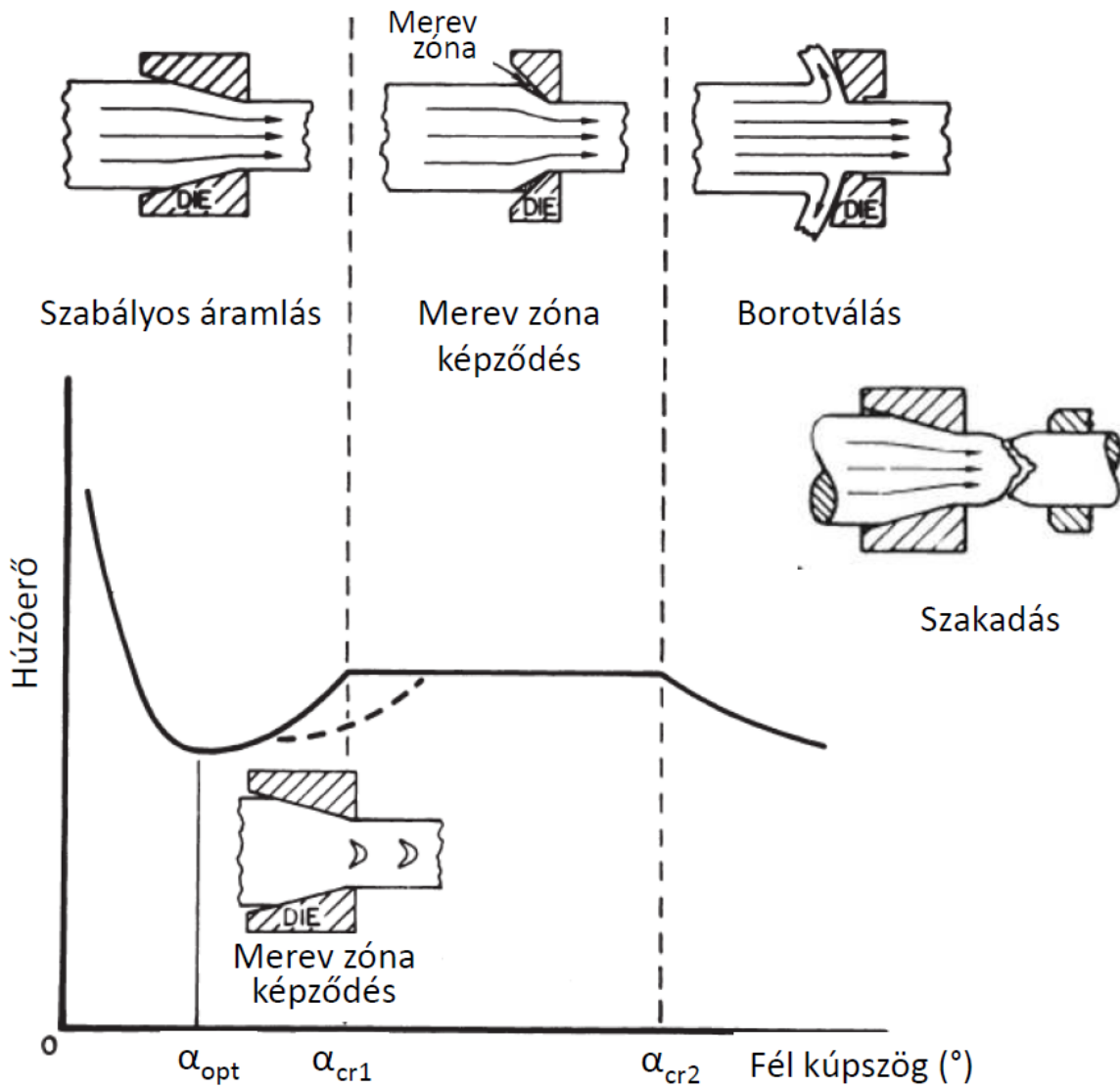


Rúd és huzal húzás valamint a redukálás differenciálegyenlete azonos, a peremfeltételek mások. Húzás esetén a kilépő keresztmetszet  $\sigma_x f$  feszültséggel terhelt.

Az egyenletek alapján lehetőség van a húzószög optimalizálására.

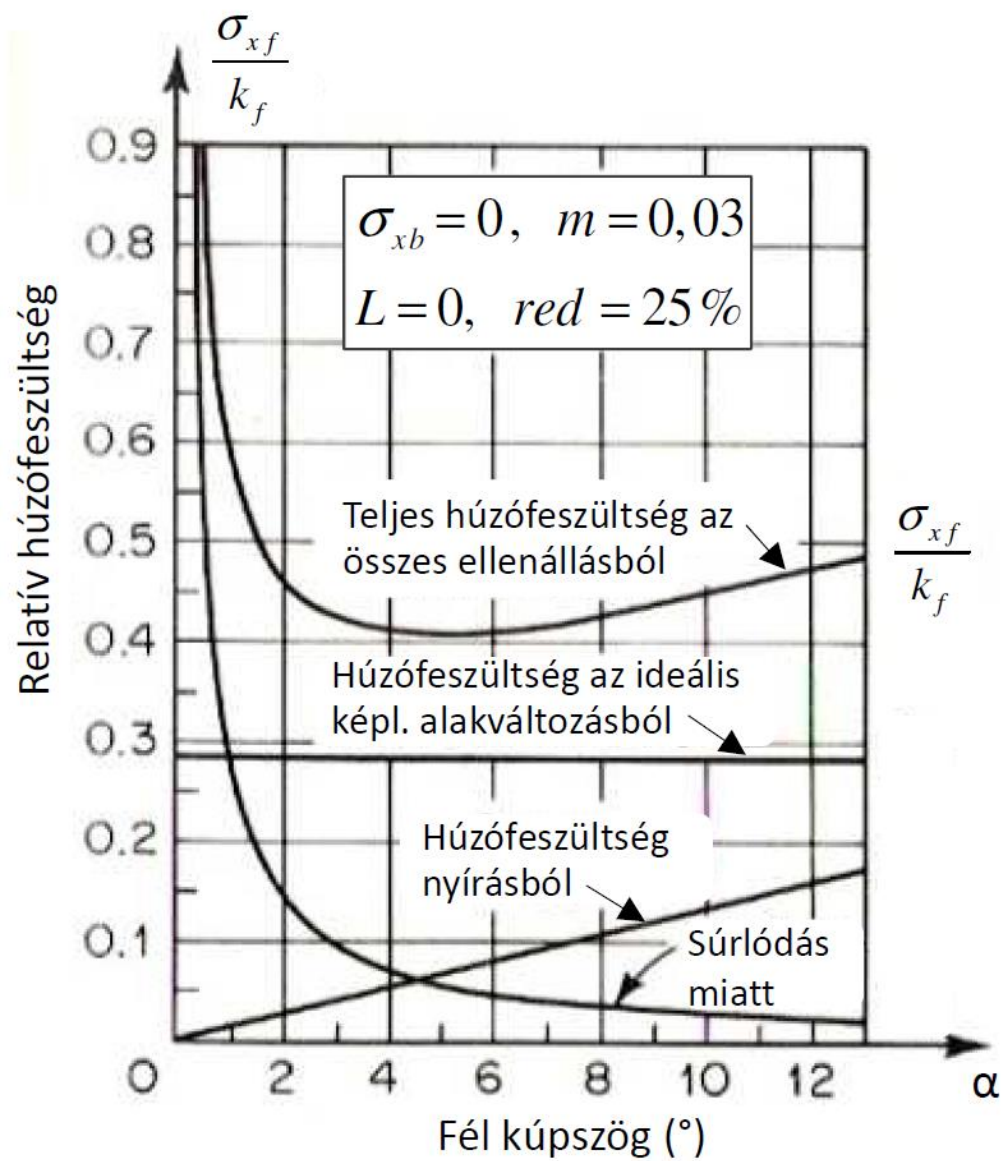


## Különböző áramlási esetek és károsodás



Az optimális szög meghatározása rúdhúzásnál.  
(egy lépés, feszítés nélkül)

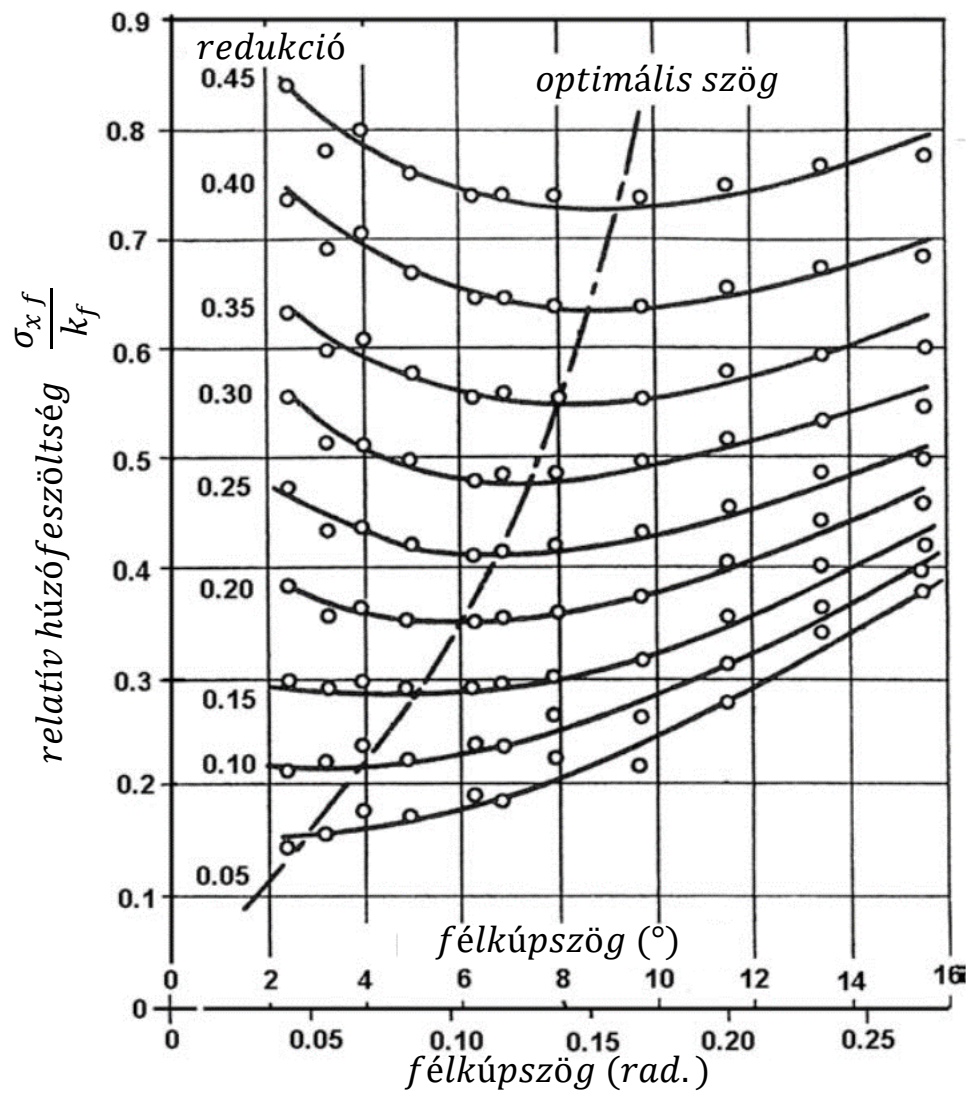
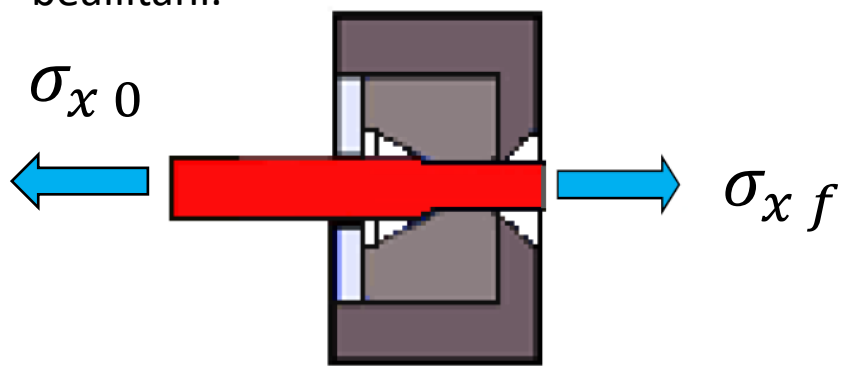
Az alakítással szembeni ellenállás a képlékeny alakváltozásból, a súrlódásból, és a képlékeny zóna határán fellépő nyírásból tevődik össze.

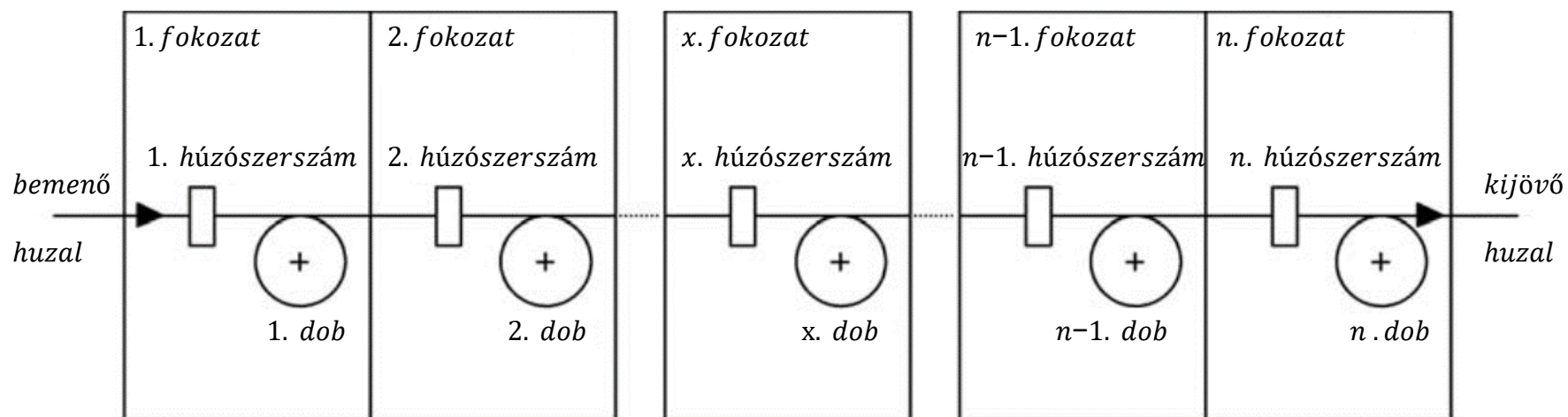




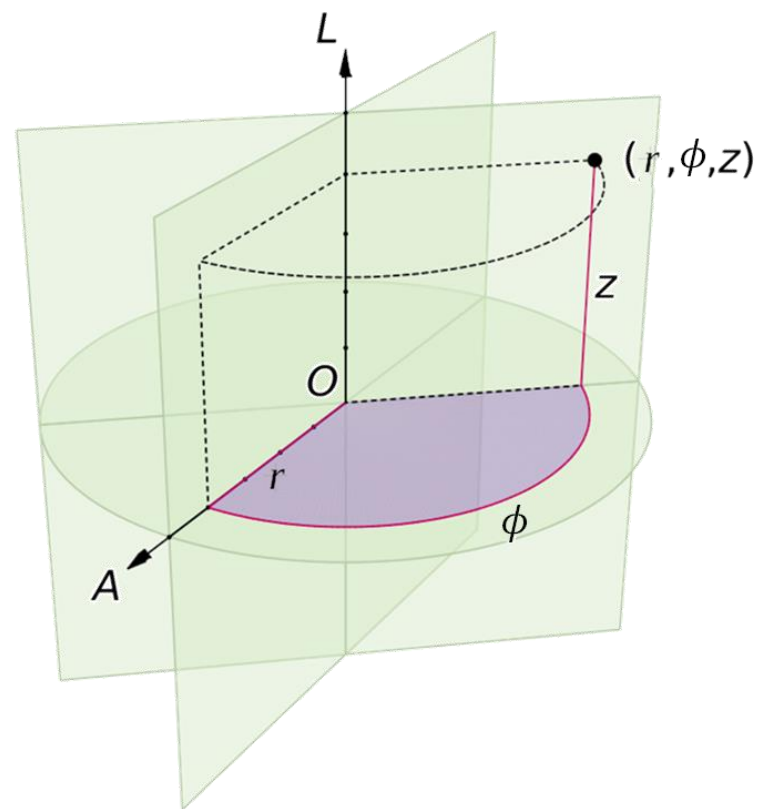
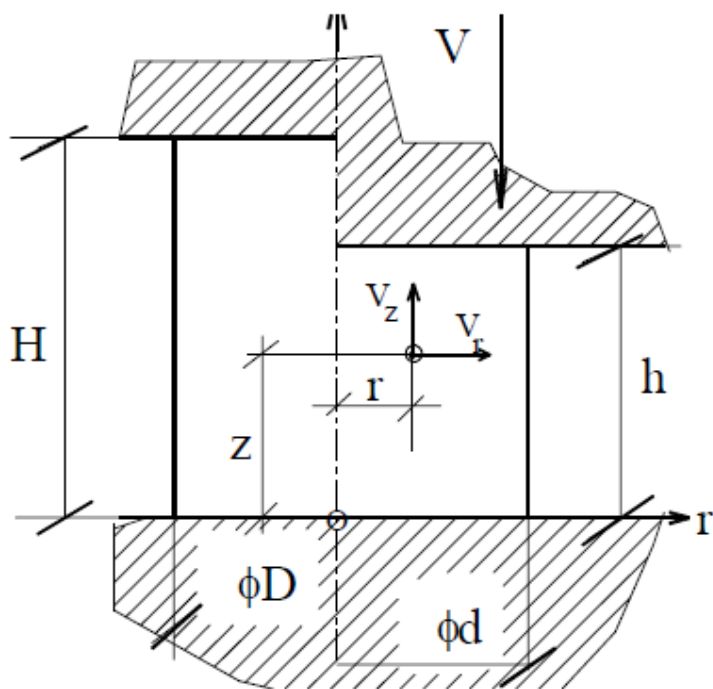
Az egy lépésben történő alakítás mértékétől függően az optimális kúpszög változik. (egy lépés, feszítés nélkül)

Ha a húzás több lépésben történik, akkor az optimális szög a feszítés ( $\sigma_{x0}$ ) mértékében változik, ami az analitikus módszerrel számolható. A szerszámgeometria és/vagy a technológia paramétereinek optimalizálásakor ezt figyelembe kell venni és ennek megfelelően kell a munkapontot beállítani.





## *Kiegészítő anyag*



## Kinematikai vizsgálat

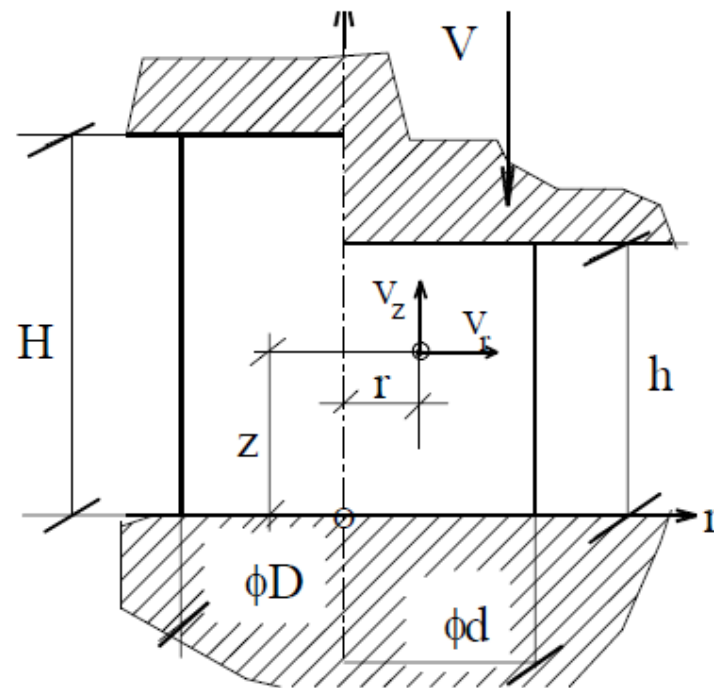
$$z = 0 \quad v_z = 0$$

$$z = h \quad v_z = -v$$

$$v_z = C_1 + C_2 z$$

$$v_z = -\frac{v}{h} z$$

$$v = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix}$$



## Összenyomhatatlanság:

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$v_r r = \int -r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

$$v_r r = \frac{v r^2}{2h} + f(C, z)$$

$$\dot{\phi}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\dot{\phi}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}$$

$$\dot{\phi}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{v}{h}$$



Peremfeltétel:

$$r = 0 \quad v_r = 0$$

$$f(C, z) = 0$$

$$v_r = \frac{v}{2h} r$$

$$\dot{\phi}_{rr} = \frac{v}{2h}$$

$$\dot{\phi}_{\theta\theta} = \frac{v}{2h}$$

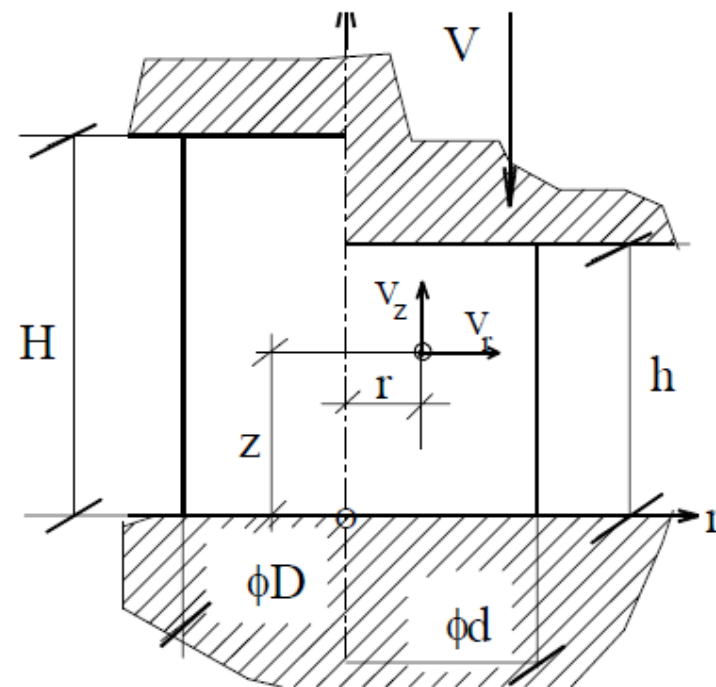
$$\dot{\phi}_{zz} = -\frac{v}{h}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$\phi^{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\phi}_{rr}^2 + \dot{\phi}_{\theta\theta}^2 + \dot{\phi}_{zz}^2)} = \frac{v}{h}$$

Ha  $v = -\frac{dh}{dt}$  és  $h_{t=0} = H$  akkor

$$\phi^{eq} = \int_0^t \dot{\phi}^{eq} dt = \int_0^t -\frac{dh}{dt} \frac{1}{h} dt = \int_H^h -\frac{dh}{h} = \ln \frac{H}{h}$$



## Statikai elemzés (egyensúlyi egyenletek):

Tangenciális irányban nincs változás:  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0$$

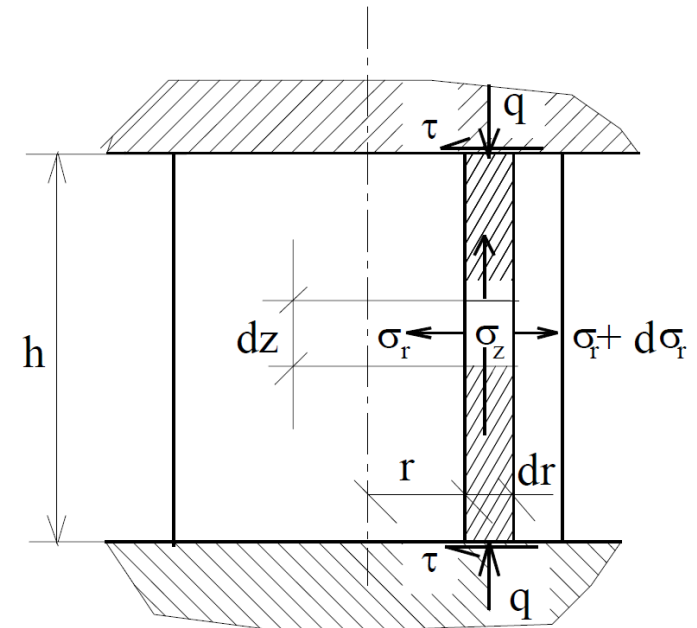
$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

A térfogatelem  $dz$  magassági mérete legyen  $h$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} = 0 \\ \sigma_z + q = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{A } z \text{ irányban } \sigma_z \text{ állandó lesz.} \\ &\sigma_r \text{ csak } r\text{-től függ.} \end{aligned}$$

A  $\tau_{rz}$  tag meghatározása

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + 0 = \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau_{zr} r) = 0 \longrightarrow \tau_{zr} r = f(C_i, z)$$

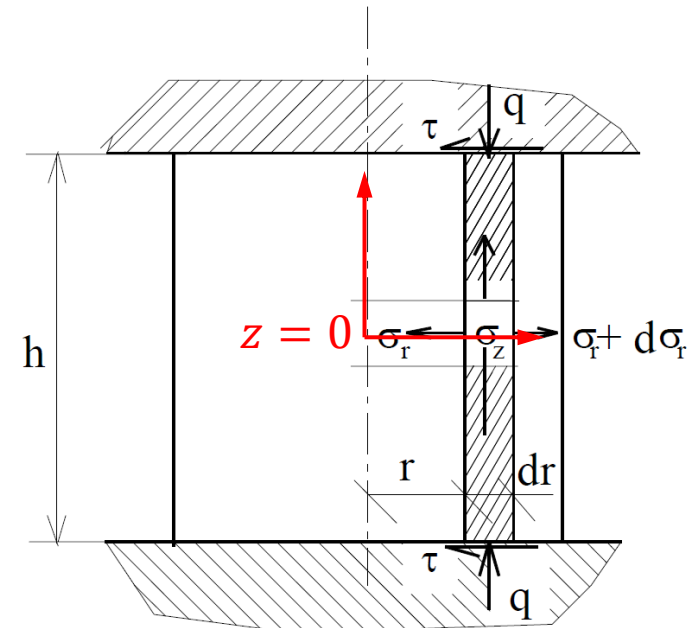


A  $\tau_{rz}$  tag meghatározása

$$\tau_{zr}r = f(C_i, z)$$

Peremfeltétel:

$$\begin{aligned} z = 0 \quad \tau_{zr} &= 0 \\ z = h/2 \quad \tau_{zr} &= -\tau \\ C_1 &= 0 \quad C_2 = -\frac{2\tau r}{h} \\ \tau_{zr} &= -\frac{2\tau}{h}z \end{aligned} \quad \tau_{zr}r = C_1 + C_2z$$



Az első egyensúlyi egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \frac{2\tau}{h} = 0$$

Lévy-Mises egyenletet a radiális és a tangenciális irányra:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{rr} &= \dot{\lambda} \sigma'_{rr} = \dot{\lambda}(\sigma_{rr} - \sigma_{hidr.}) \\ \dot{\varphi}_{\theta\theta} &= \dot{\lambda} \sigma'_{\theta\theta} = \dot{\lambda}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{hidr.}) \end{aligned}$$

A két egyenlet

különbsége

$$\dot{\varphi}_{rr} - \dot{\varphi}_{\theta\theta} = \dot{\lambda}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$$

Mivel  $\dot{\varphi}_{rr} = \dot{\varphi}_{\theta\theta} = \frac{v}{2h}$  és  $\dot{\lambda} \neq 0$

így:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \frac{2\tau}{h} = 0 \quad \xrightarrow{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0} \quad \boxed{\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2\tau}{h} = 0} \quad (1)$$

A Mises féle folyási feltétel:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 = 2k_f^2 \quad \xrightarrow[\text{összefüggésekkel}]{\text{Fenti}} \quad \sigma_{rr} + q = k_f$$

$k_f$  nem függ a helytől ezért:  $\boxed{\frac{\partial}{\partial r}}$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\partial q}{\partial r} \quad \xrightarrow{(1)\text{-be helyettesítve:}} \quad \boxed{\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{2\tau}{h} = 0}$$

A megoldás az alkalmazott súrlódási modelltől függ.

A továbbiakban a Kudo-féle modellt nézzük meg.



Kudo-féle súrlódási modell alkalmazásával.

$$\tau = \pm m \frac{k_f}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{2\tau}{h} = \frac{\partial q}{\partial r} + m \frac{2k_f}{\sqrt{3}h} = 0$$

integrálva  $r$  szerint:

$$dq = -m \frac{2k_f}{\sqrt{3}h} dr$$

$$q = - \int m \frac{2k_f}{\sqrt{3}h} dr$$

$$q = -m \frac{2k_f}{\sqrt{3}h} r + C$$

Peremfeltétel:

$$r = d/2 \text{ helyen } \sigma_r = 0$$

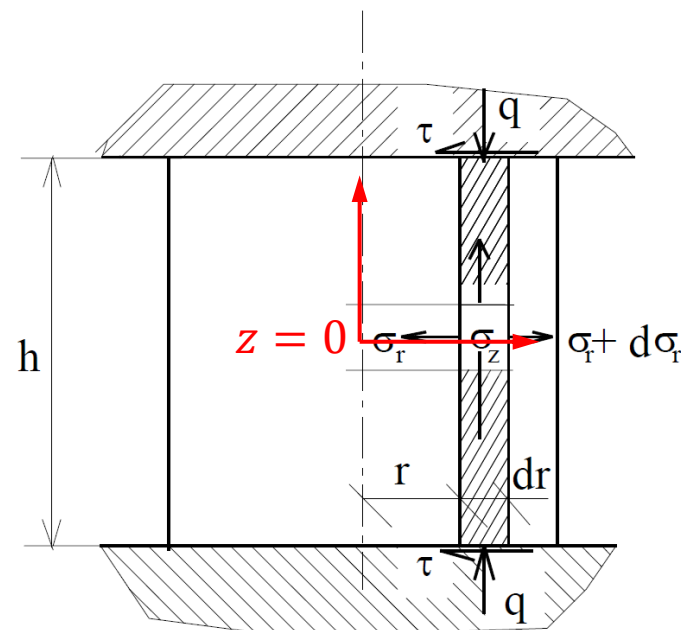
$$\sigma_{rr} + q = k_f$$

$$q = k_f$$

$$C = k_f + m \frac{k_f}{\sqrt{3}} \frac{2d}{h}$$

Nyomáseloszlás a darab felületén:

$$q = k_f \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{3}} \frac{2}{h} \left( \frac{d}{2} - r \right) \right]$$



Az alakítás erőszükséglete:

$$F = \int_0^{d/2} q 2r \pi dr = \int_0^{d/2} k_f \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{3}} \frac{2}{h} \left( \frac{d}{2} - r \right) \right] 2r dr = k_f \frac{d^2 \pi}{4} \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{3}} \frac{d}{3h} \right]$$

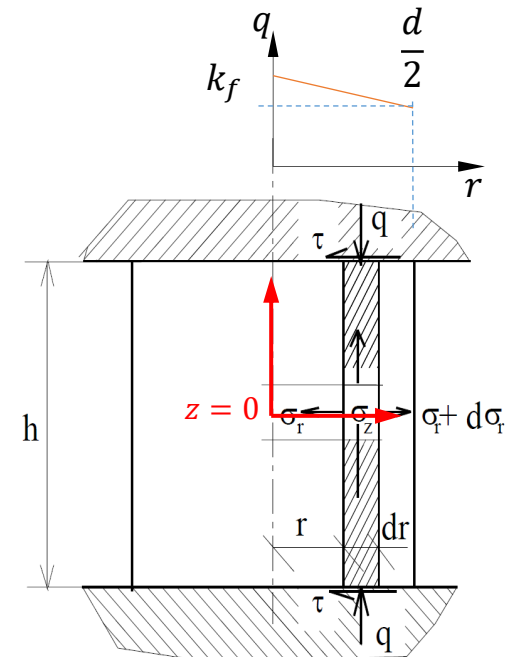
$$F = k_f \frac{d^2 \pi}{4} \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{3}} \frac{d}{3h} \right]$$

Nyomáseloszlás  
a felületen:

$$q = k_f \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{3}} \frac{2}{h} \left( \frac{d}{2} - r \right) \right]$$

Az alakítási ellenállás:

$$p = \frac{F}{A} = k_f \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{3}} \frac{d}{3h} \right]$$



- Ziaja Gy. Alakítástechnika jegyzet