

# Anyagmodellek

Alakítótechnológiák elmélete  
(BMEGEMTNG00)

- Anyagtörvények
- Folyási feltétel
- Keményedés
- Anyagegyenletek
- Alakítási szilárdság

## Anyagtörvény

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \\ \rho &= \rho(\mathbf{x}, t) \\ T &= T(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

### Tömegmegmaradás

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0$$

$\rho$  – sűrűség  
 $\mathbf{v}$  – sebesség  
 $\sigma$  – feszültség

### Dinamika

$$\operatorname{div} \sigma + \rho \mathbf{t} = \rho \mathbf{a}$$

$$\sigma \cdot \nabla + \rho \mathbf{t} = \rho \mathbf{a}$$

$$\sigma_{ij,i} + \rho t_i = \rho a_i$$

$\mathbf{a}$  – gyorsulás  
 $c$  – fajhő  
 $\lambda$  – hővezetési tényező

### Energia megmaradás

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \sigma : \mathbf{D}$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda \nabla T) \cdot \nabla + \sigma : \mathbf{D}$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda T)_{,ii} + \sigma_{ij} D_{ij}$$

*alakváltozási  
sebességtenzor  
(más jelöléssel  $\xi$ )*

Az anyagtörvény egyenletei a rendszer termomechanikai kölcsönhatását fejezik ki. Az anyagtörvény meghatározásakor kísérleti eredmények kiértékelésére alapozva állapítunk meg általános összefüggéseket.

A valódi anyag igen sokféle tulajdonsággal rendelkezik. Ezek mindegyikét az anyagtörvény előállításakor nem tudjuk figyelembe venni. Ezért a valódi anyag egy, az adott folyamat szempontjából legjellemzőbb tulajdonságát ragadjuk meg és úgy tekintjük, hogy az egész kontinuum csak ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik. Az anyagtörvény az ilyen leszűkített tulajdonságú kontinuum matematikai egyenlete.

A reális anyag viselkedésének három alapvető tulajdonsága a **rugalmasság**, a **viszkozitás**, és a **képlékenység**.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} 3\varepsilon_0 \delta_{ij} \right]$$

(Izotróp anyag esetében)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{ij} - \nu(3\sigma_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}) \right]$$

Csúsztató rugalmassági modulus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Közepes alakváltozás

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}$$

Hidrosztatikus feszültség

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

Kompressziós modulus

$$\sigma_0 = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \varepsilon_0 = K\varepsilon_0$$

Más alakban:

$$\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}$$

Viszkózus test esetében az anyagtvény a feszültség és az alakváltozási sebesség között állapít meg kapcsolatot. Lineárisan viselkedő anyagnál ez az összefüggés az alábbi:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2 \mu \mathbf{D}'$$

$$\frac{1}{3} \sigma_I = -p + k D_I$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $\sigma_I = \sigma_{kk}$   $D_I = D_{kk}$

k - térfogati viszkozitási tényező

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{13} \\ D'_{21} & D'_{22} & D'_{23} \\ D'_{31} & D'_{32} & D'_{33} \end{bmatrix}$$

Nem-lineáris esetben:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2 \cdot \mu(T, \mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}'$$

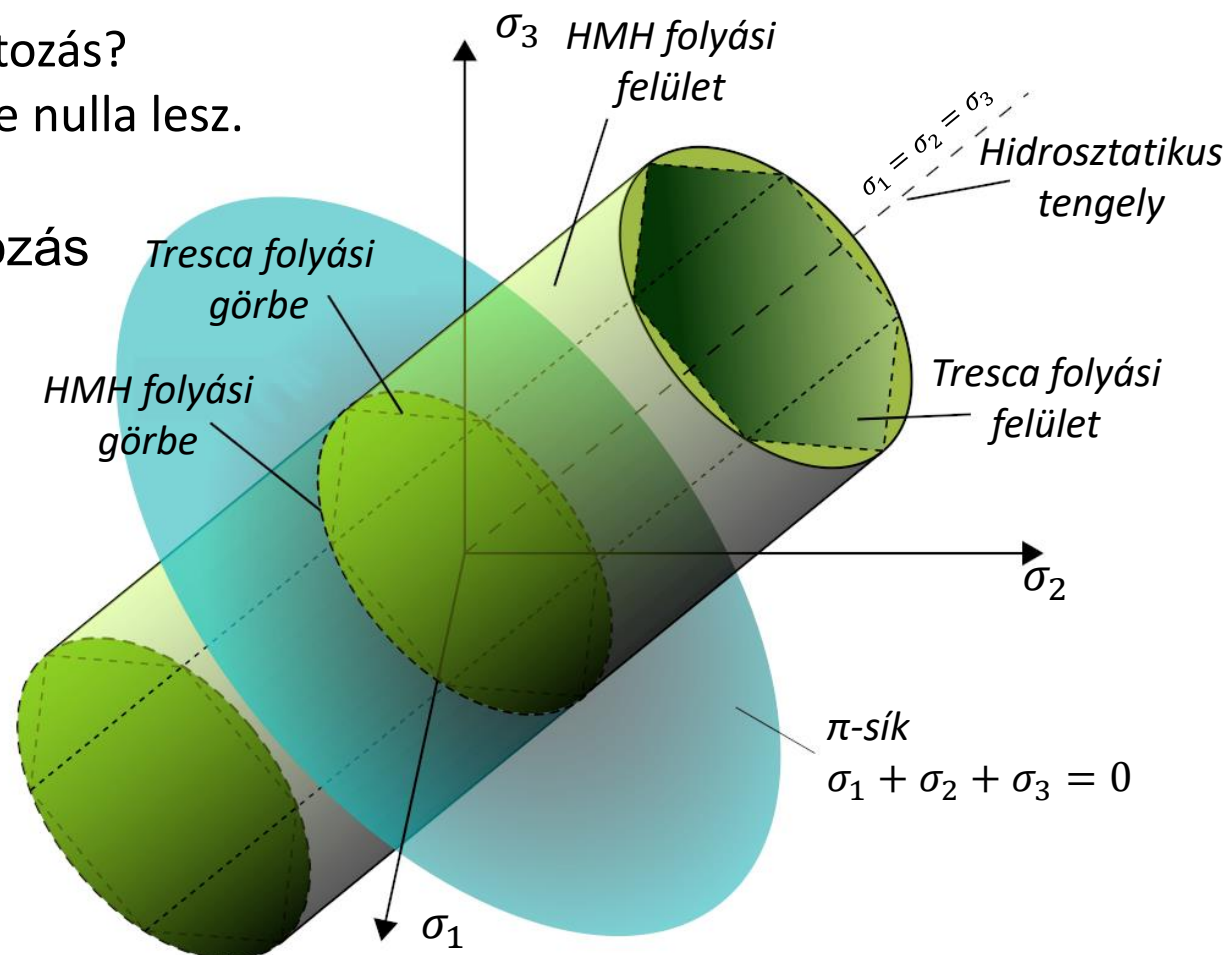
Képlékeny alakváltozás esetén a test a tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját. A képlékeny alakváltozás folyamatát ezért mindig utólag, a tehermentesítés után tudjuk megállapítani, ami megnehezíti a képlékeny viselkedés és az anyagtörvény leírását.

Mikor kezdődik a képlékeny alakváltozás?

Amikor az  $f(\sigma_{ij}, k_f)$  kifejezés értéke nulla lesz.

$f(\sigma_{ij}, k_f) < 0$  rugalmas alakváltozás

$f(\sigma_{ij}, k_f) = 0$  képlékeny állapot



$f(\sigma_{ij}, k_f) = 0$  képlékeny állapot

$$\frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) - \tau_f = 0$$

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 2\tau_f$$

Egyszerű nyírás:

Főirányok rendszerében:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = (\sigma_{12} - (-\sigma_{12})) = 2\sigma_{12}$$

$$2\sigma_{12} = 2\tau_f \quad \text{Ok! } \checkmark$$

Egyszerű szakítás:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = (\sigma_{11} - 0) = \sigma_{11}$$

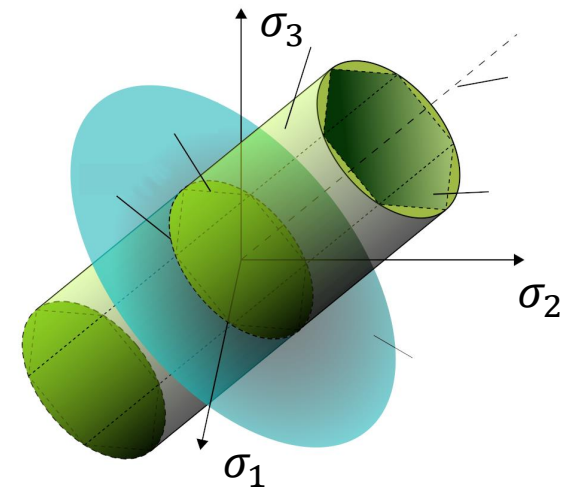
$$\sigma_{11} = k_f = 2\tau_f \rightarrow \tau_f = \frac{k_f}{2}$$

$\tau_f$  - nyíró szilárdság

$\sigma_{max,min}$  - legnagyobb és legkisebb főfeszültség

$k_f$  - alakítási szilárdság

Definíció: Az alakítási szilárdság ( $k_f$ ) a képlékeny alakváltozás megindításához és fenntartásához szükséges feszültség **egytengelyű feszültségi állapotban**.



$$\sigma_{eq}^{Tresca} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = k_f(\varphi, \dot{\varphi}, T)$$

A folyási felület alakja nem egyezik a megfigyelésekkel!

Egyszerű (kézi) számításokhoz használható.



$f(\sigma_{ij}, k_f) = 0$  képlékeny állapot

$$-\tau_f^2 + J_2(\sigma') = 0$$

$$\tau_f^2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$$

$$\tau_f^2 = \frac{1}{2} (\sigma'_{11}{}^2 + \sigma'_{22}{}^2 + \sigma'_{33}{}^2 + 2(\sigma'_{12}{}^2 + \sigma'_{13}{}^2 + \sigma'_{23}{}^2))$$

$$\tau_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma'_{11}{}^2 + \sigma'_{22}{}^2 + \sigma'_{33}{}^2 + 2(\sigma'_{12}{}^2 + \sigma'_{13}{}^2 + \sigma'_{23}{}^2))}$$

Egyszerű nyírás:

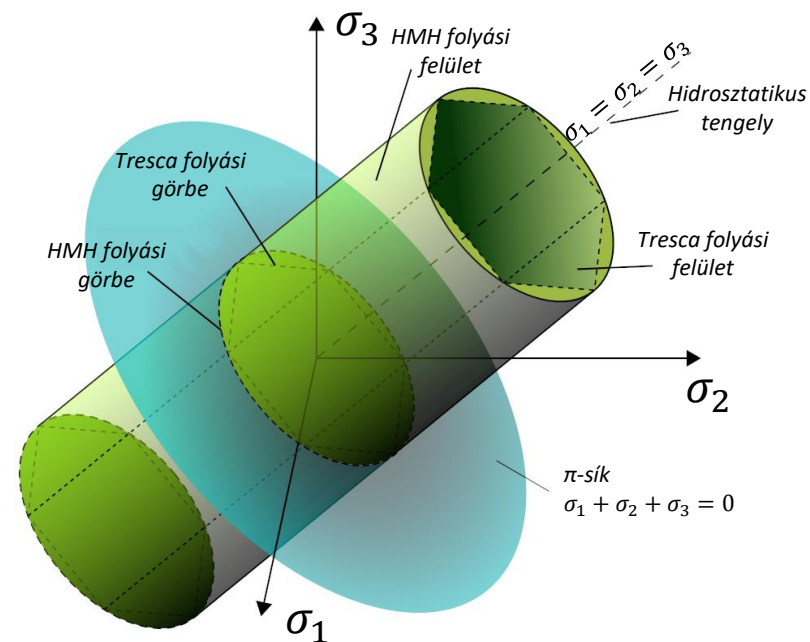
$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \tau_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_{12}^2} \rightarrow \tau_f = \sigma_{12} \quad \text{Ok! } \checkmark$$

Ez megegyezik a deviátoros feszültségtenzorial, mivel  $\sigma_0 = 0$

$\tau_f$  - nyíró szilárdság

$J_2(\sigma')$  - a deviátoros feszültség második skalár invariánsa  
(main invariant:  $J_2$ )  $J_2(\sigma') = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$

$k_f$  - alakítási szilárdság



Egyszerű szakítás:

*Deviátoros feszültség tenzor*

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{\sigma_{11}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_{11}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_{11}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\tau_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2\sigma_{11}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_{11}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_{11}}{3}\right)^2}$$

$$\tau_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{6\sigma_{11}^2}{9}} \quad \tau_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\sigma_{11}^2}{3}}$$

$$\tau_f = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{11} \rightarrow \sigma_{11} = k_f = \sqrt{3} \tau_f \rightarrow \tau_f = \frac{k_f}{\sqrt{3}}$$

$$k_f = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$$

Általános esetben felhasználva, hogy a deviátoros feszültségtenzor  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$

$$\sigma_{eq}^{HMH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}$$

$$\sigma_{eq}^{HMH} = k_f(\varphi, \dot{\varphi}, T)$$

$f(\sigma_{ij}, k_f) = 0$  képlékeny állapot

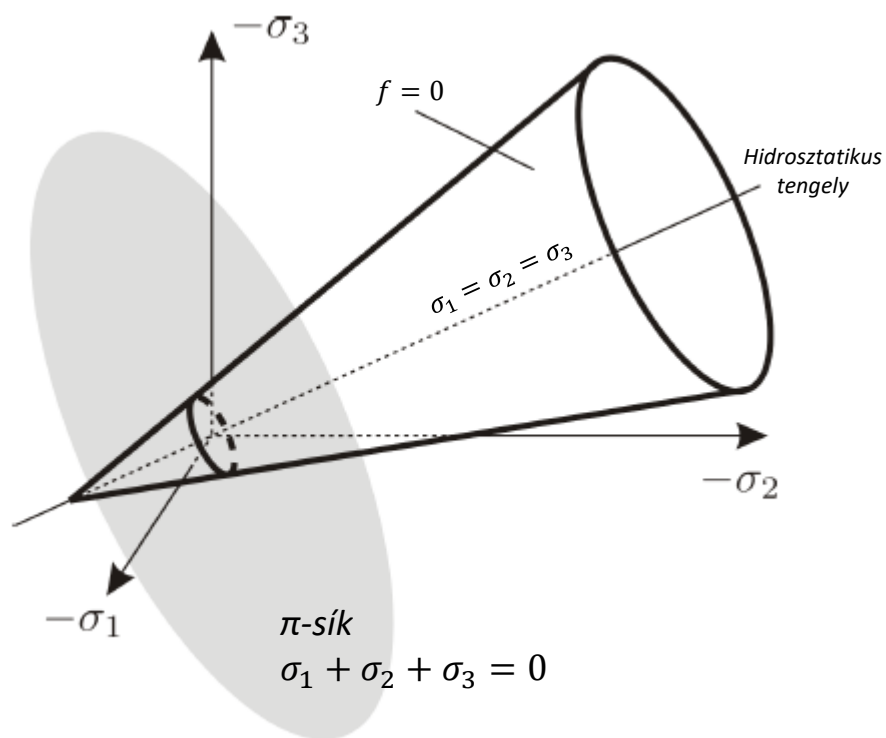
$$\sqrt{J_2(\sigma')} - A - B\sigma_I = 0$$

$\sigma_I$  - a feszültség első skalár invariánsa

$J_2(\sigma')$  - a deviátoros feszültség második skalár invariánsa

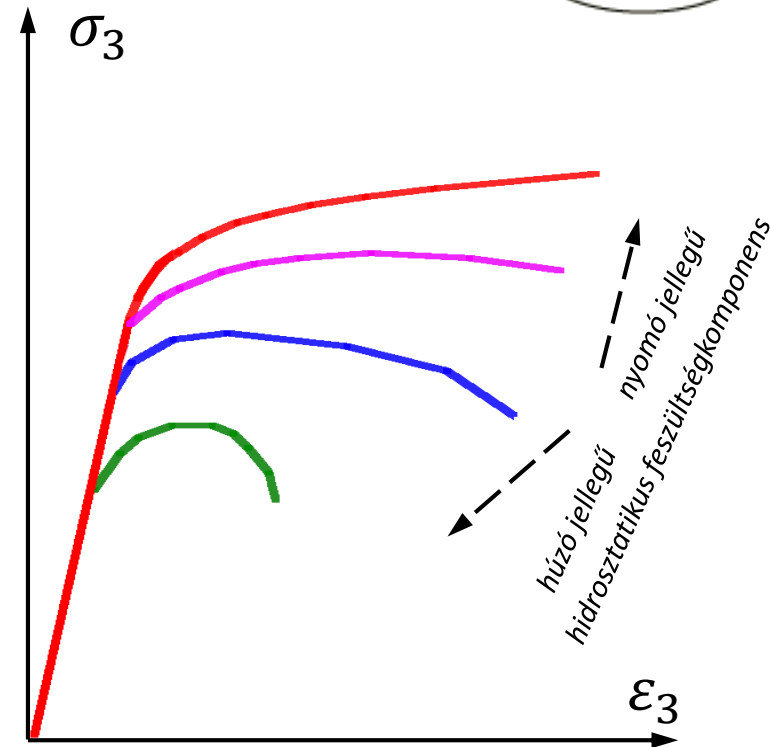
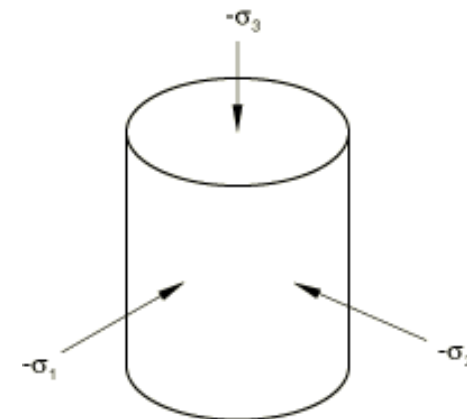
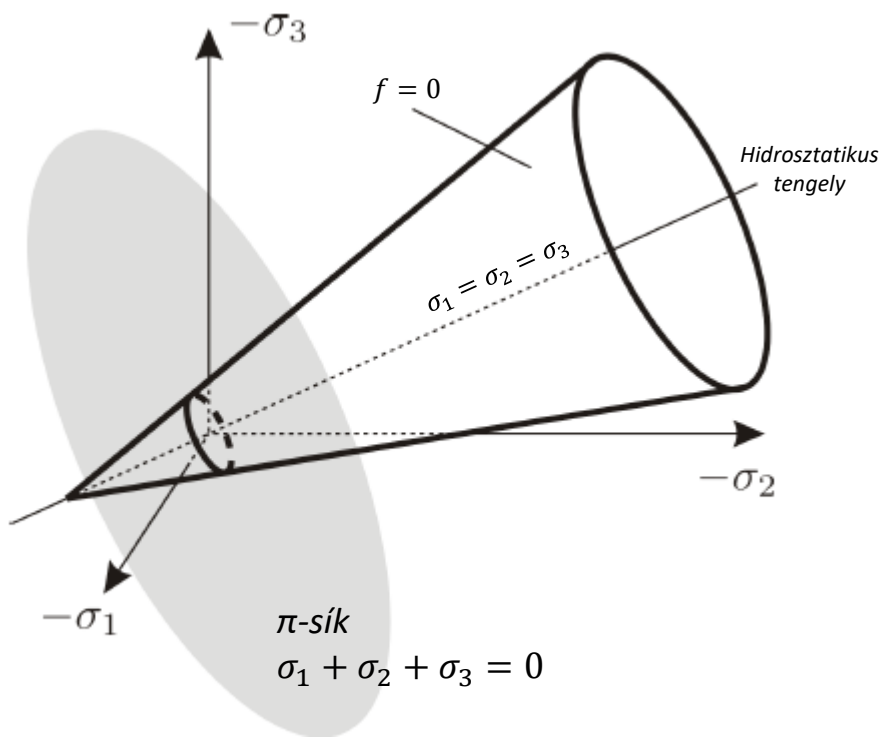
$$J_2(\sigma') = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$$

$A, B$ - anyagjellemzők



A képlékeny alakváltozás megindulása függ a hidrosztatikus feszültségi állapottól.

Fémes anyagok esetében, az alakítástechnikában érvényes feltételek mellett ez a hatás nem jelentős. A hidrosztatikus feszültségi állapotnak a tönkremenetel szempontjából van jelentősége, amit más tönkremeneteli modellekkel veszünk figyelembe.

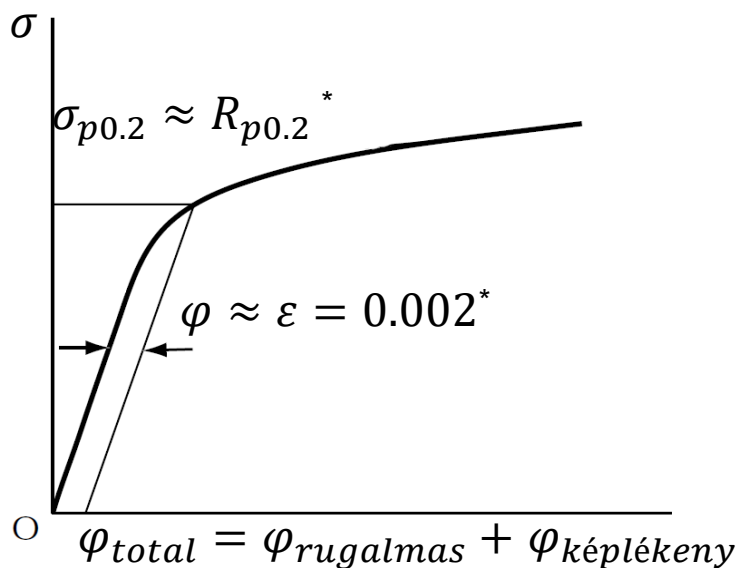


Kerámiák és bizonyos polimerek viselkedésének leírására jól alkalmazható.

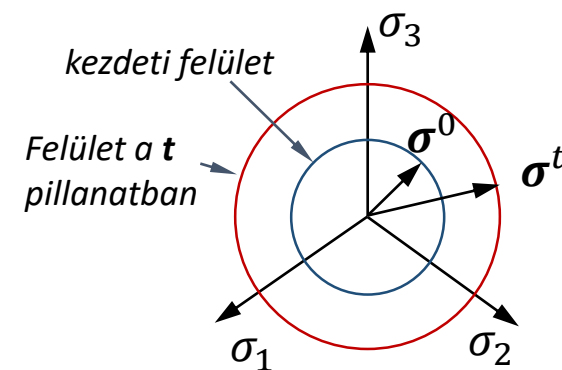
Ha az anyag szilárdsága az alakítási folyamat során nő, keményedésről beszélünk. Ennek oka a mikroszerkezeti folyamatokra vezethető vissza. Az alakítási szilárdság ( $k_f$ ) értéke függ az **alakváltozástól**, az **alakváltozási sebességtől** és a **hőmérséklettől**. A számításoknál sokszor egyszerűsített leírást használunk:

$$k_f = k_f(\varphi, \dot{\varphi}, T)$$

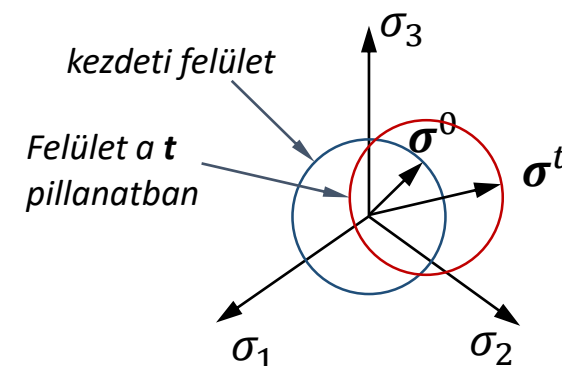
Két féle alapvető keményedési modellt alkalmazunk, az **izotrópikus** és a **kinematikus keményedést**.



## Izotrópikus keményedés



## Kinematikus keményedés

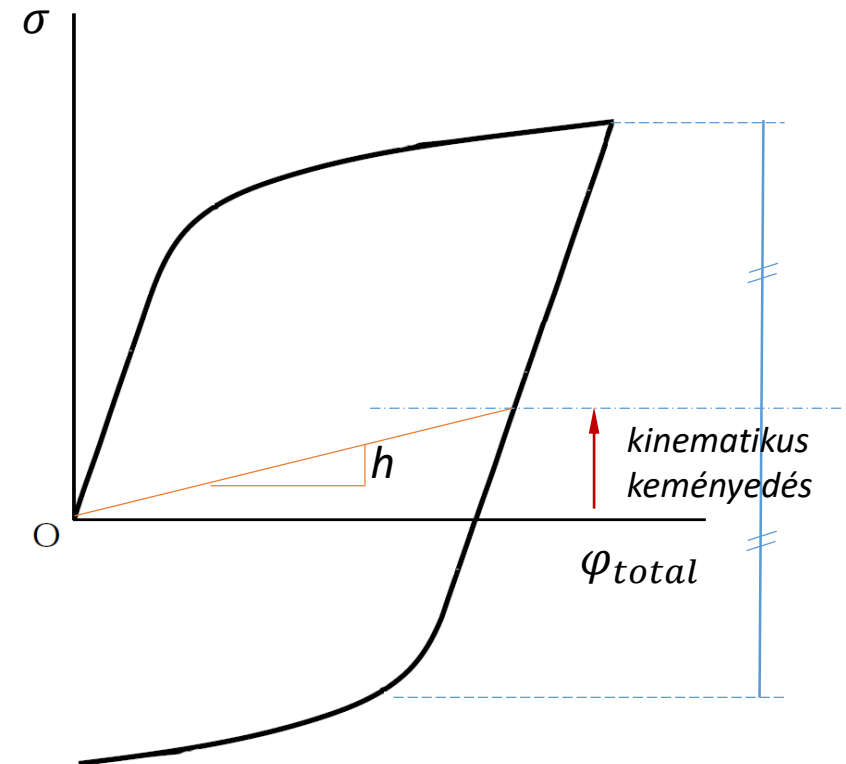
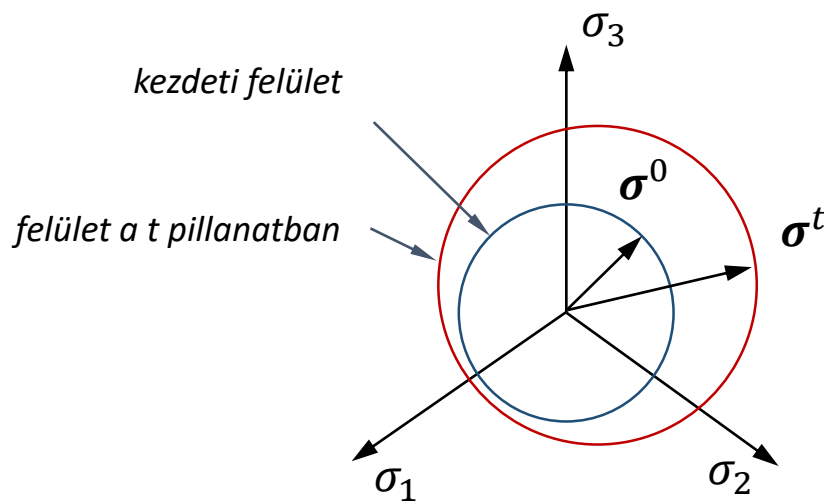


\*Kis alakváltozások esetén a mérnöki és a valódi rendszer közötti különbség elhanyagolható.

## Kombinált keményedési modell

A folyási felület az alakváltozás hatására egyszerre növekszik (*izotrópikus keményedés*) és elmozdul (*kinematikus keményedés*).

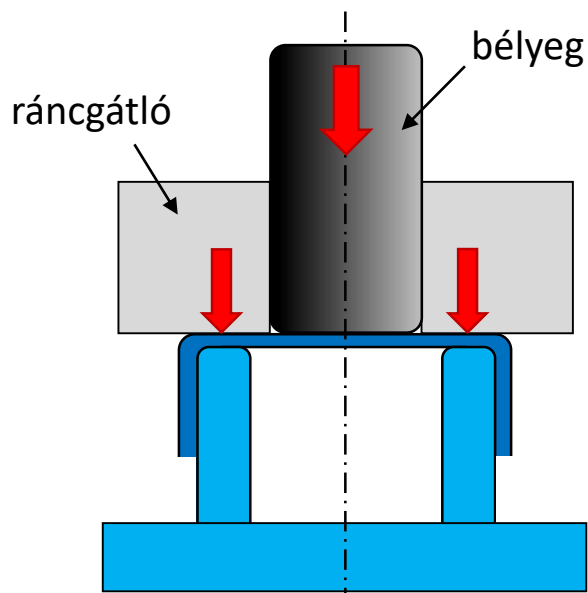
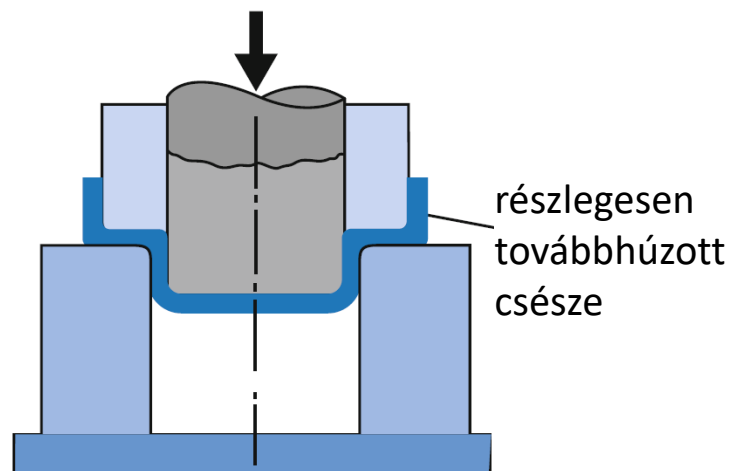
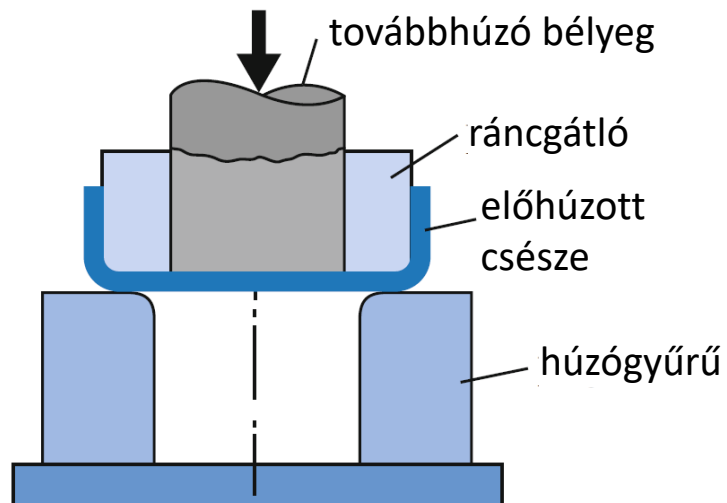
A keményedés kinematikus komponensét lineáris esetben a  $h$  meredekséggel lehet megadni.



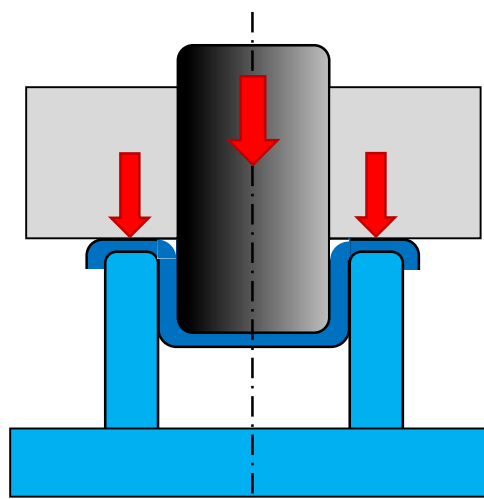
Egytengelyű húzó-nyomó vizsgálat kombinált keményedés esetén.  
(*Bauschinger hatás*)

## Mélyhúzás

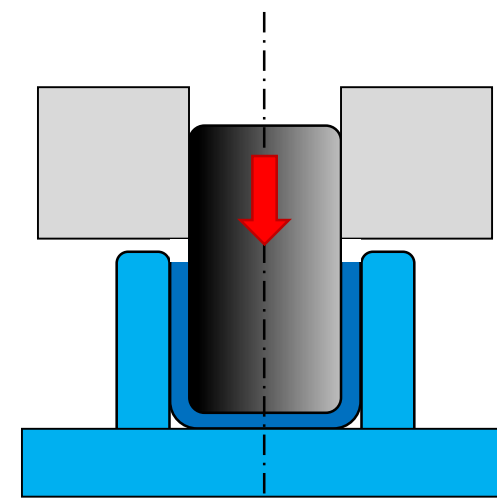
Továbbhúzás,  
Kifordító mélyhúzás



előhúzott csésze

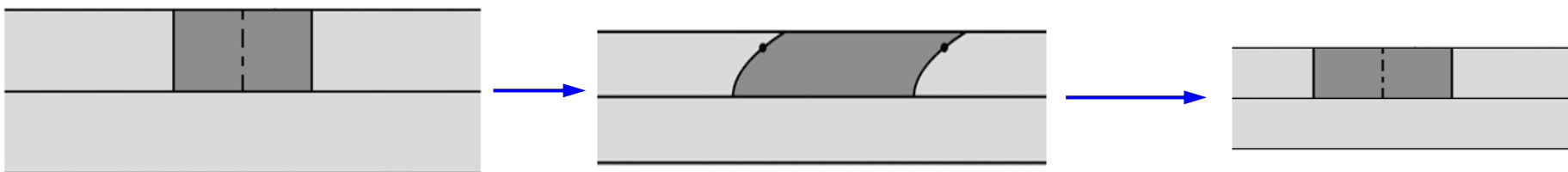
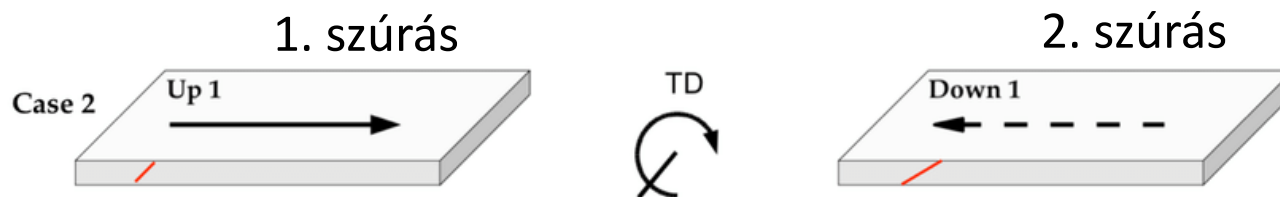
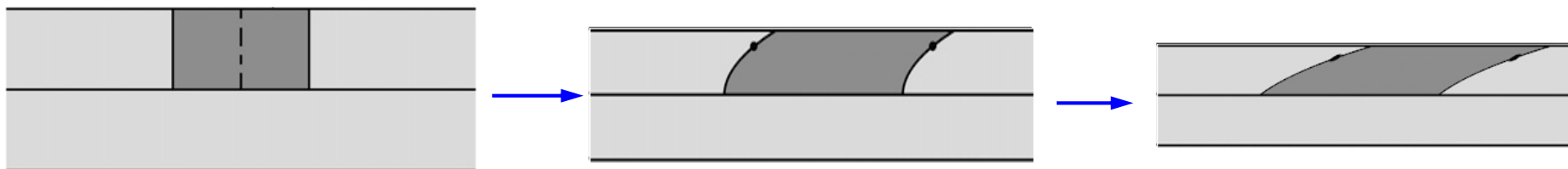
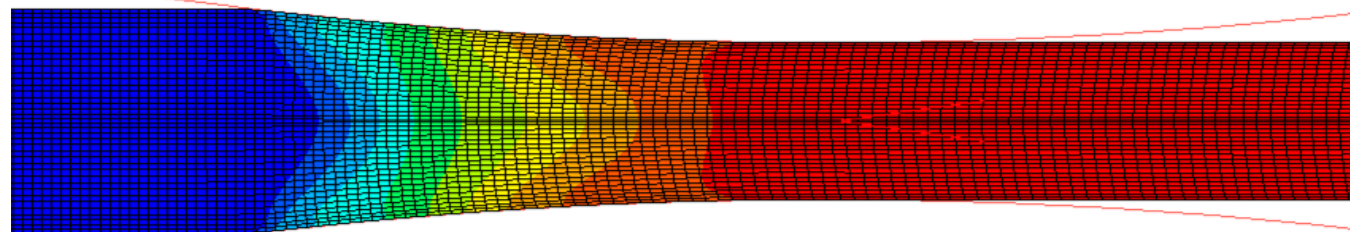


részlegesen továbbhúzott csésze



készre húzott csésze

## Hengerlési utak





A **Levy-Mises** összefüggés azt adja meg, hogy képlékeny állapotban a feszültség mekkora alakváltozás növekményt okoz a deviátoros feszültség függvényében.

$$d\varphi_{ij} = d\lambda\sigma'_{ij}$$

$\lambda$  - arányossági tényező

Ha a rugalmas alakváltozást nem hanyagoljuk el, akkor az alakváltozás növekmény felbontható rugalmas és képlékeny tagra. Ez a **Prandtl-Reuss** egyenlet.

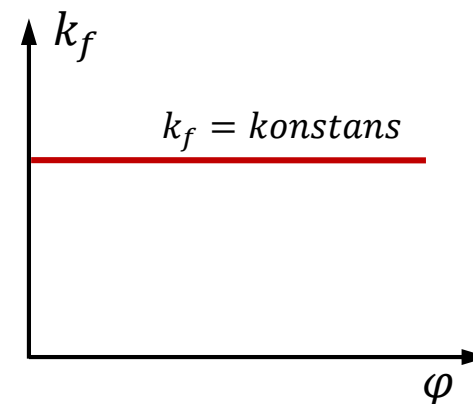
$$d\varphi_{ij} = d\varphi_{ij}^{rug.} + d\varphi_{ij}^{képl.}$$

$$d\varphi_{ij}^{képl.} = d\lambda\sigma'_{ij}$$

$\lambda$  - arányossági tényező

**A deviátoros feszültég és az alakváltozás növekmény főirányai egybe esnek.**

## Ideálisan képlékeny anyag $k_f$ görbéje



## Hidegalakítási $k_f$ görbék

$$k_f = C_2 \cdot \varphi^n \quad \text{Nádai-Rejtő formula}$$

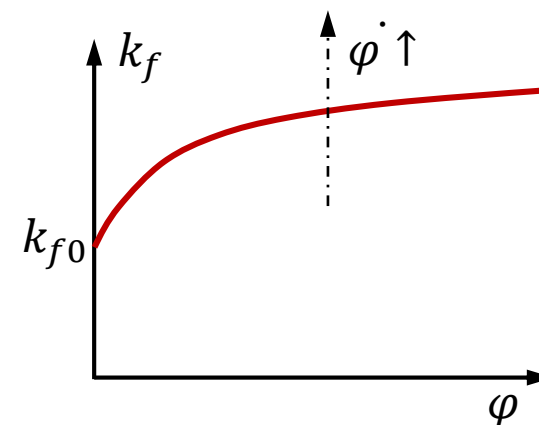
$$k_f = C_1 + C_2 \cdot \varphi^n \quad \text{Ludwik formula}$$

$$k_f = C_1 + C_2 \cdot \varphi^n + C_3 \cdot e^{C_4 \varphi}$$

$$k_f = C_2 \cdot \left( \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^m$$

$n$  - keményedési kitevő

$m$  - sebességekitevő

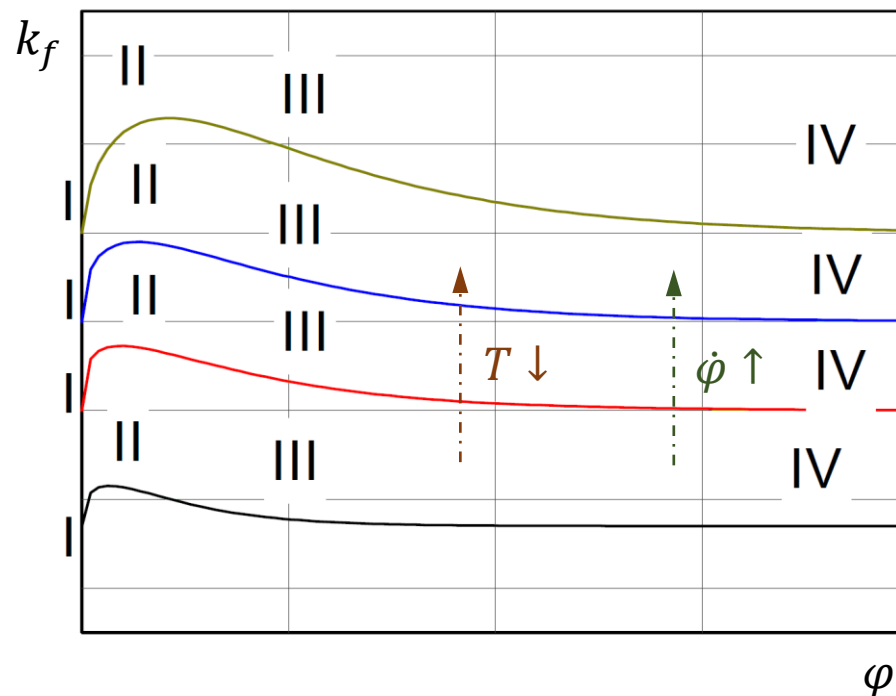


## Melegalakítási $k_f$ görbék

**I, II** – A diszlokáció sűrűség növekedésével járó keményedési folyamatok.

**III** – Lágyulási folyamatok beindulása (dinamikus megújulás és poligonizáció).

**IV** – Állandósult szakasz. Állandó, vagy nagyon kis mértékben változó alakítási szilárdság és nagy alakváltozó képesség. Dinamikus poligonizáció (szubszemcse szerkezet) és a dinamikus rekristallizáció.



## Johnson-Cook egyenlet

$$k_f = [A + B \varphi_{eq}^n] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\varphi}_{eq}}{\dot{\varphi}_0} \right) \right] \left( 1 + \left( \frac{T - T_{ref}}{T_{olv} - T_{ref}} \right)^m \right)$$

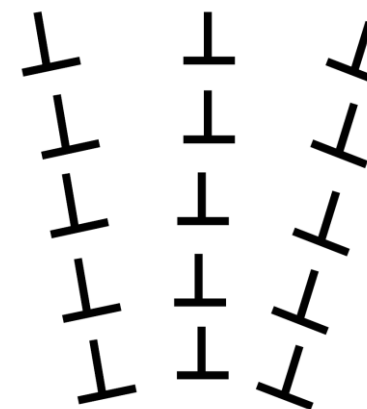
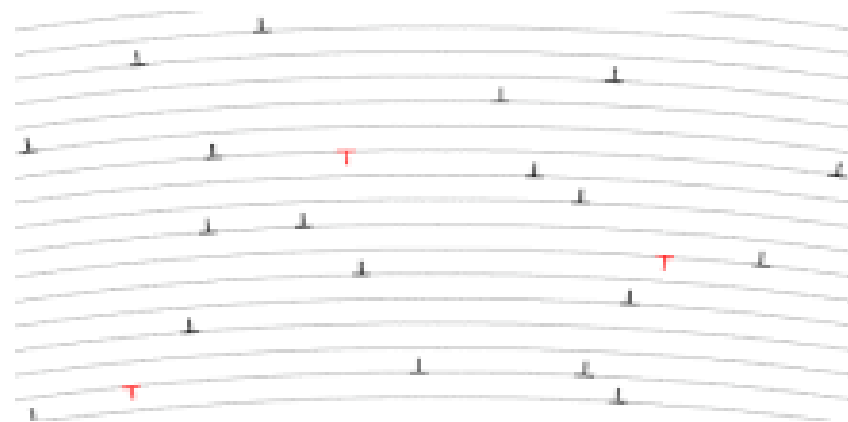
Numerikus interpoláció mérési eredményekből

## A hevítés és hőntartás hatására lejátszódó folyamatok:

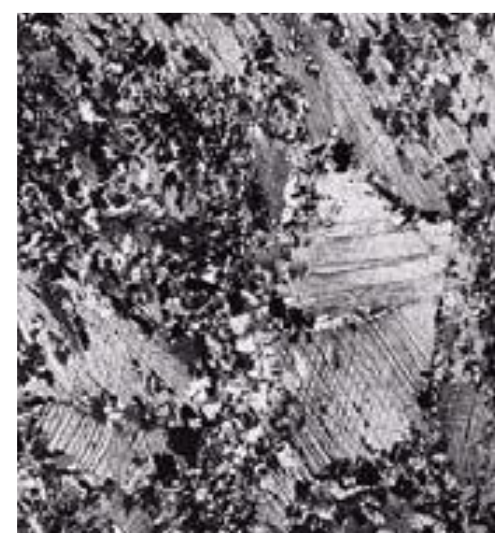
1. A többlet intersztíciós atomok és üres rácshelyek átrendeződése.
2. Ellentétes előjelű diszlokációk kioltják egymást.



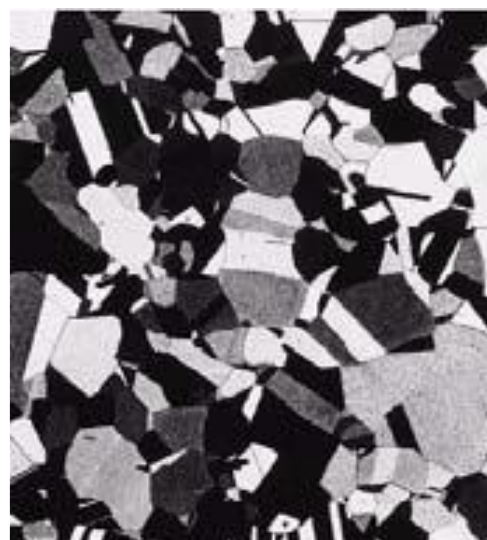
3. Diszlokáció sűrűség csökkenése, átrendeződése (**poligonizáció**).
4. Újrakristályosodás
5. Szemcsedurvulás



Szubszemcse határok



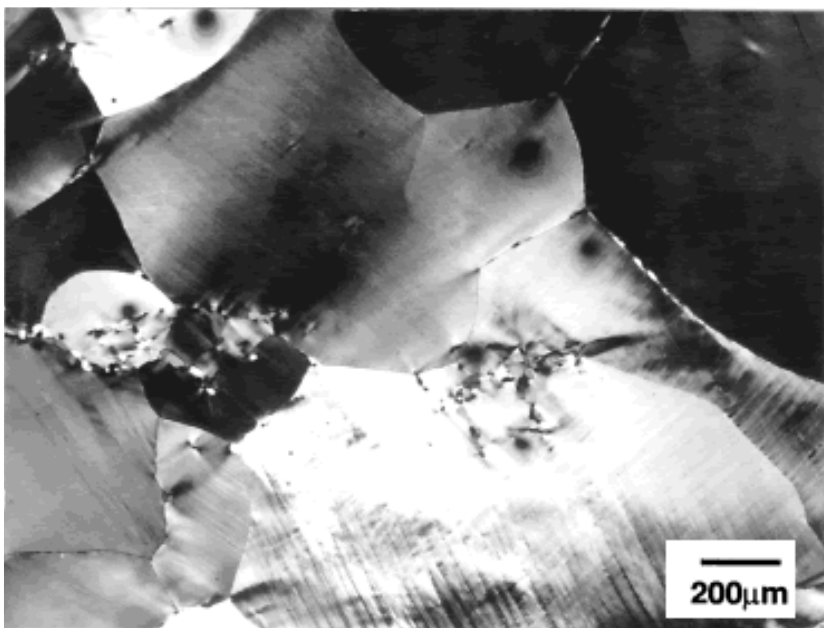
Alakított szerkezet



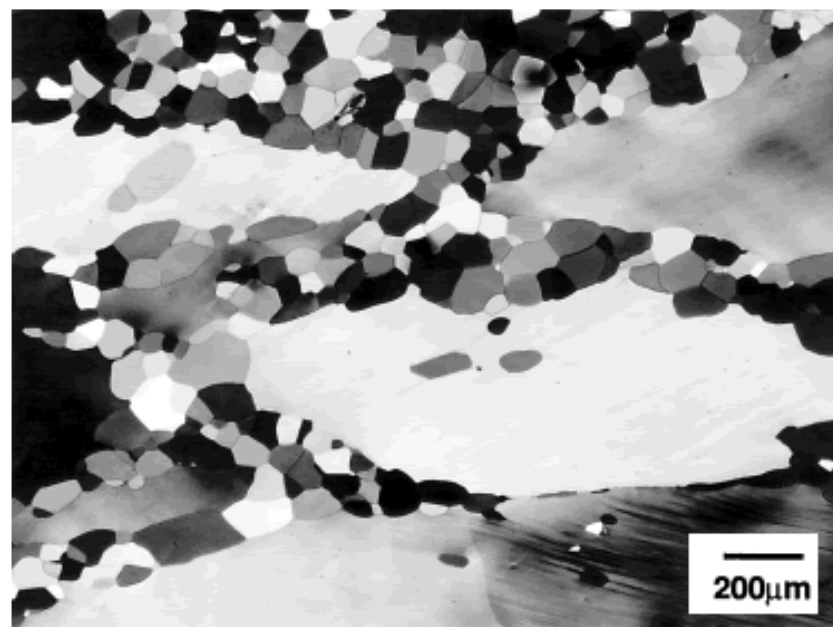
Sárgaréz szövetszerkezeti változása

## Al-Mg ötvözet szövetszerkezeti változása

### újrakristályosodási csírok

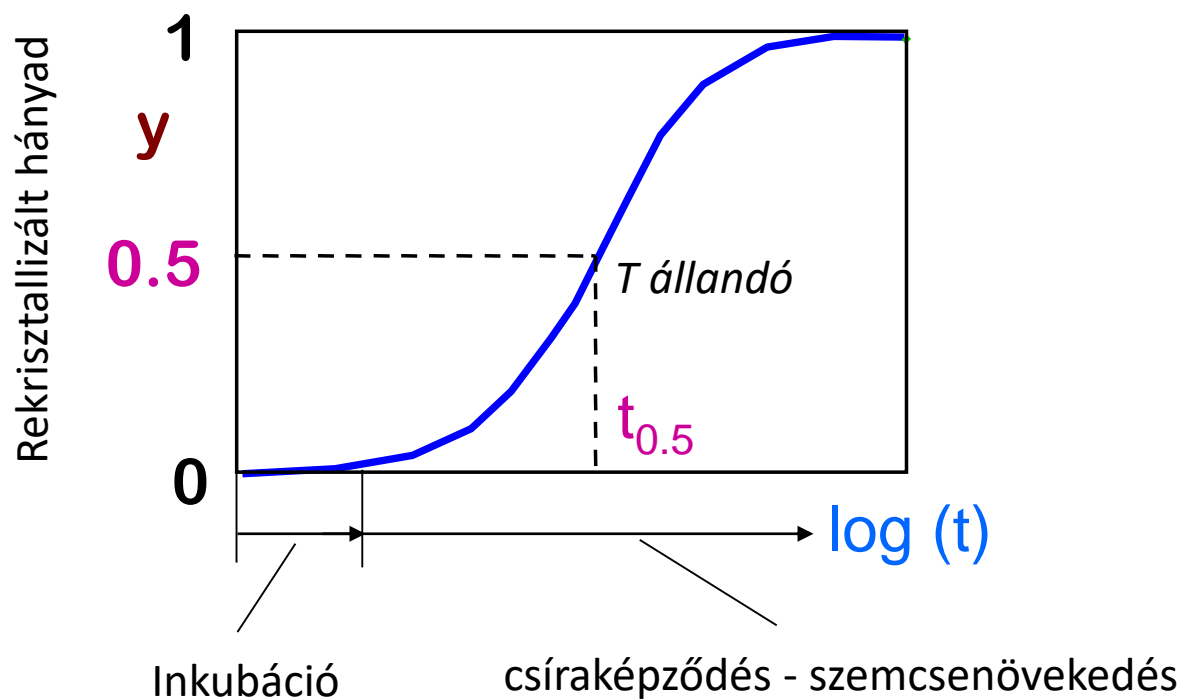
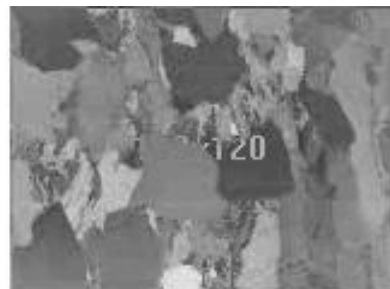


Szemcsehatáron,  
második fázisok környezetében,  
csúszási kötegek tartományában



Heterogén tartományok,  
nagy orientáció különbség  
és nagy diszlokáció sűrűség

## Johnson–Mehl–Avrami–Kolmogorov (JMAK) egyenlet:



$$y = 1 - e^{-kt^n}$$

$$r = \frac{1}{t_{0.5}} - \text{Átalakulási sebesség}$$

$$r = A e^{-\frac{Q}{RT}}$$

## Folyamat paraméterek

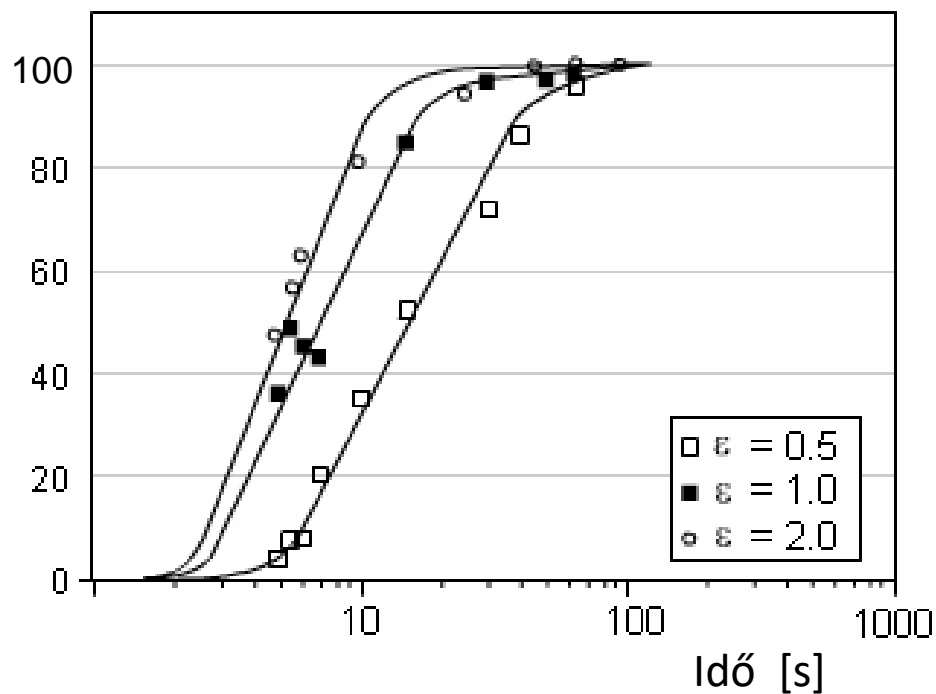
- Hőmérséklet  
(termikusan aktivált folyamat)
- Hevítés sebessége  
(nagyobb hevítési sebesség → nagyobb rekrisztallizáció sebesség)
- Hevítés ideje
- Alakváltozás mértéke
- Alakváltozás sebessége

## Mikroszerkezeti tényezők

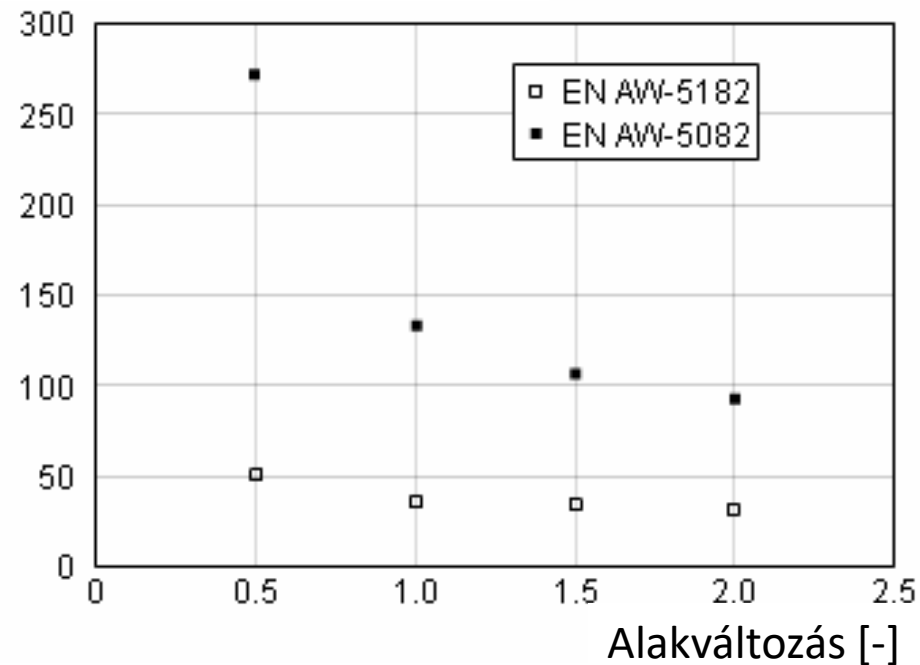
- Kezdeti szemcsenagyság  
(finomabb kiinduló szemcse → finomabb rekr. szemcse, nagyobb rekrisztallizáció sebesség)
- Második fázisú részecskék mérete, eloszlása, kapcsolódása az alapszerkezethez
- Oldott anyagok mennyisége és minősége
- Alakítás előtti és utáni textúra



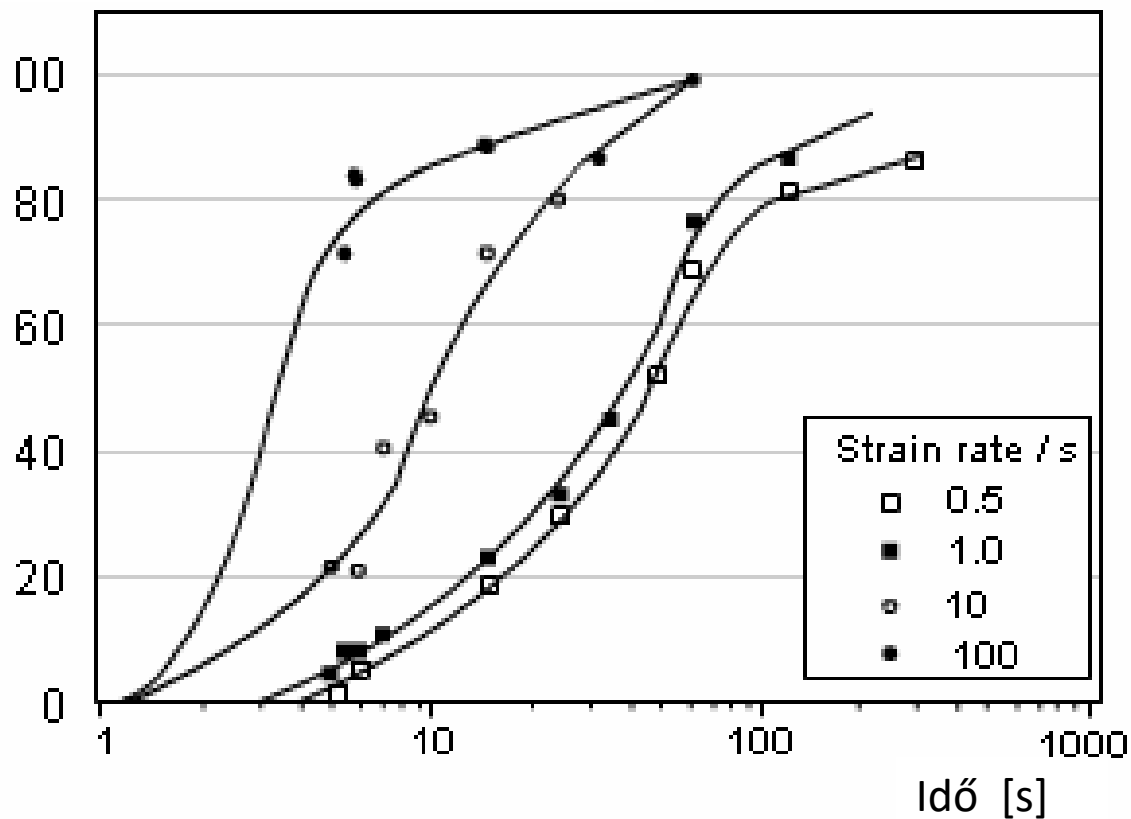
Rekristallizált hányad [%]



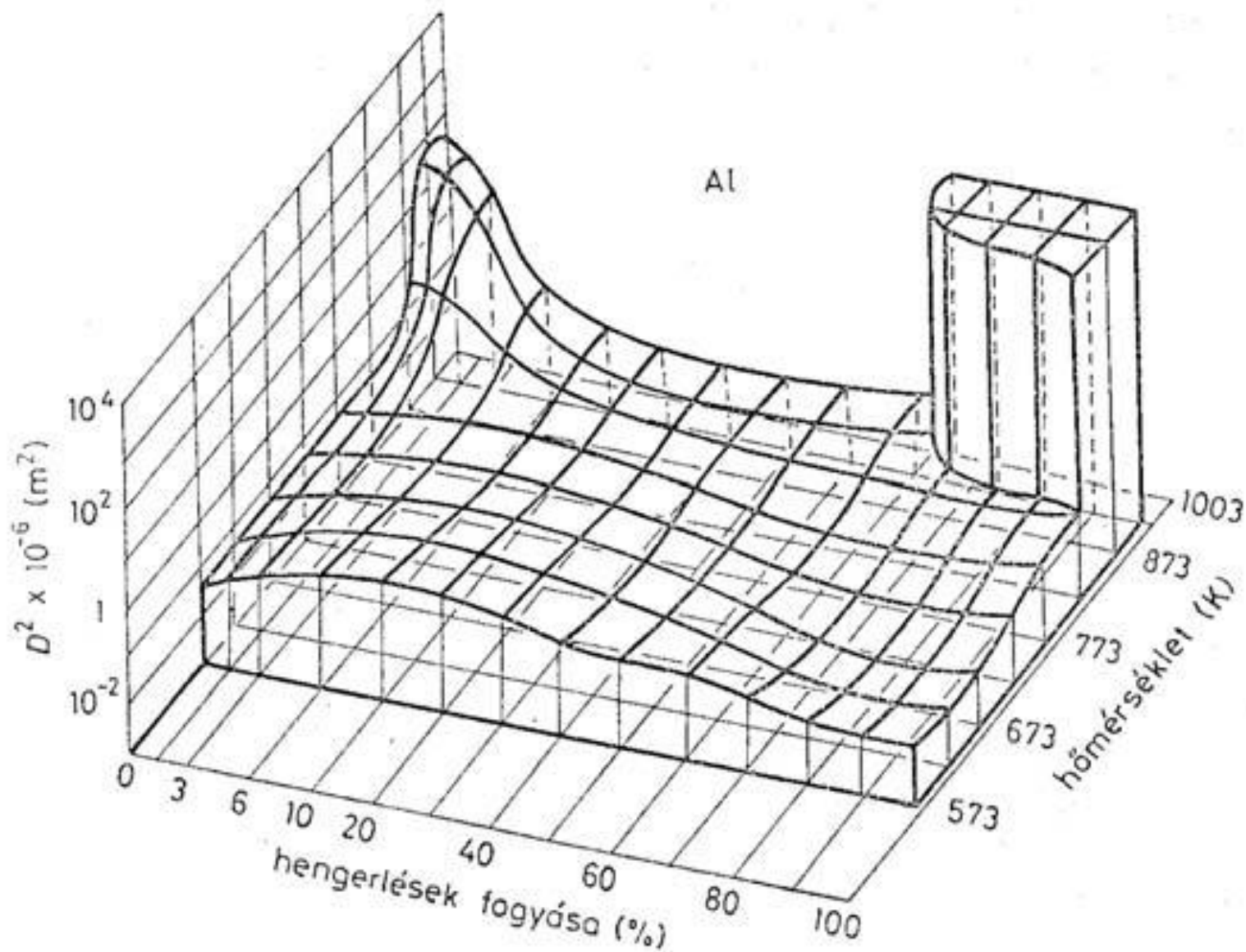
Szemcsenagyság [ $\mu\text{m}$ ]



Rekrisztallizált hányad [%]



Az alakváltóási sebesség növelése a rekrisztallizáció sebességének növelését eredményezi.

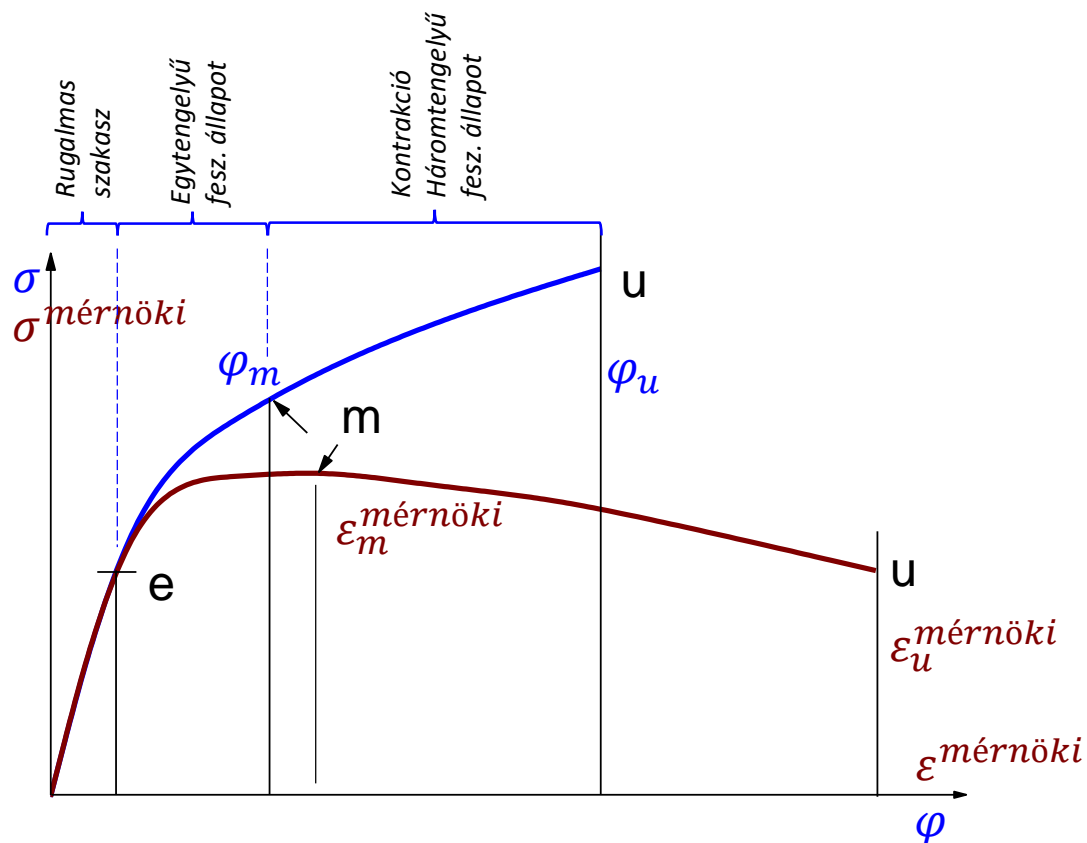


- Kritikus (kismértékű) alakváltozás kell a rekrisztallizáció elindításához.
- A rekrisztallizáció hőmérséklete csökken, ha a hevítés időtartama növekszik.
- A rekrisztallizáció hőmérséklete csökken az előzetes alakítás mértékének növekedésével.
- A rekrisztallizált szemcse nagysága az alakváltozás mértékének növelésével csökken.
- Tiszta fémek könnyebben rekrisztallizálhatók, mint az ötvözetek.
- Adott nagyságú alakváltozás esetén a rekrisztallizáció hőmérséklete nő:
  - a kezdeti szemcsenagyság növekedésével.
  - az alakítás hőfokának növelésével.

## Szakítóvizsgálat

A görbének csak a kontrakcióig mért szakasza lenne használható, ahol egytengelyű feszültségi állapot van.

A kontrakció kezdetéhez tartozó  $\varphi_m$  érték az  $n$  keményedési kitevőhöz közeli kicsi érték (0,15-0,4).



Az alakítástechnikai folyamatok elemzéséhez ennél nagyobb alakváltozások esetén is ismernünk kell a szilárdság értékét, ezért a szakítóvizsgálat eredményei nem, vagy csak nagyon korlátozottan használhatók a  $k_f$  meghatározására.

## Watts-Ford vizsgálat (Wedge indentation test)

Vizsgálati feltételek:

- sík alakváltozási állapot:

a)  $b/w > 5$

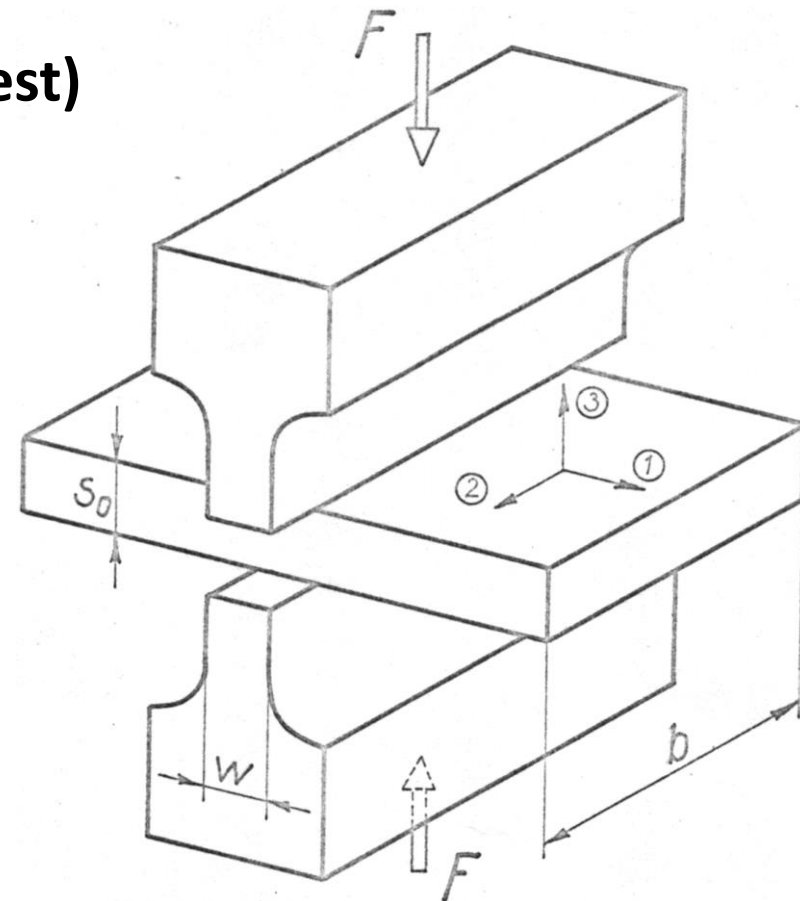
b)  $2 < w/s < 4$

- jó kenés

Az erőt ( $F$ ) és a lemezvastagságot ( $s$ ) mérjük.  
A zömítést mindig olyan széles szerszámmal végezzük ami aktuálisan biztosítja a sík alakváltozási állapotot.

Névleges szerszám szélességek: 12 6 3,6 2,2 1,3 0,8 mm

A próbatest kezdeti vastagsága ( $s_0$ ) 3 mm,  
hossza ( $b$ ) 30 mm



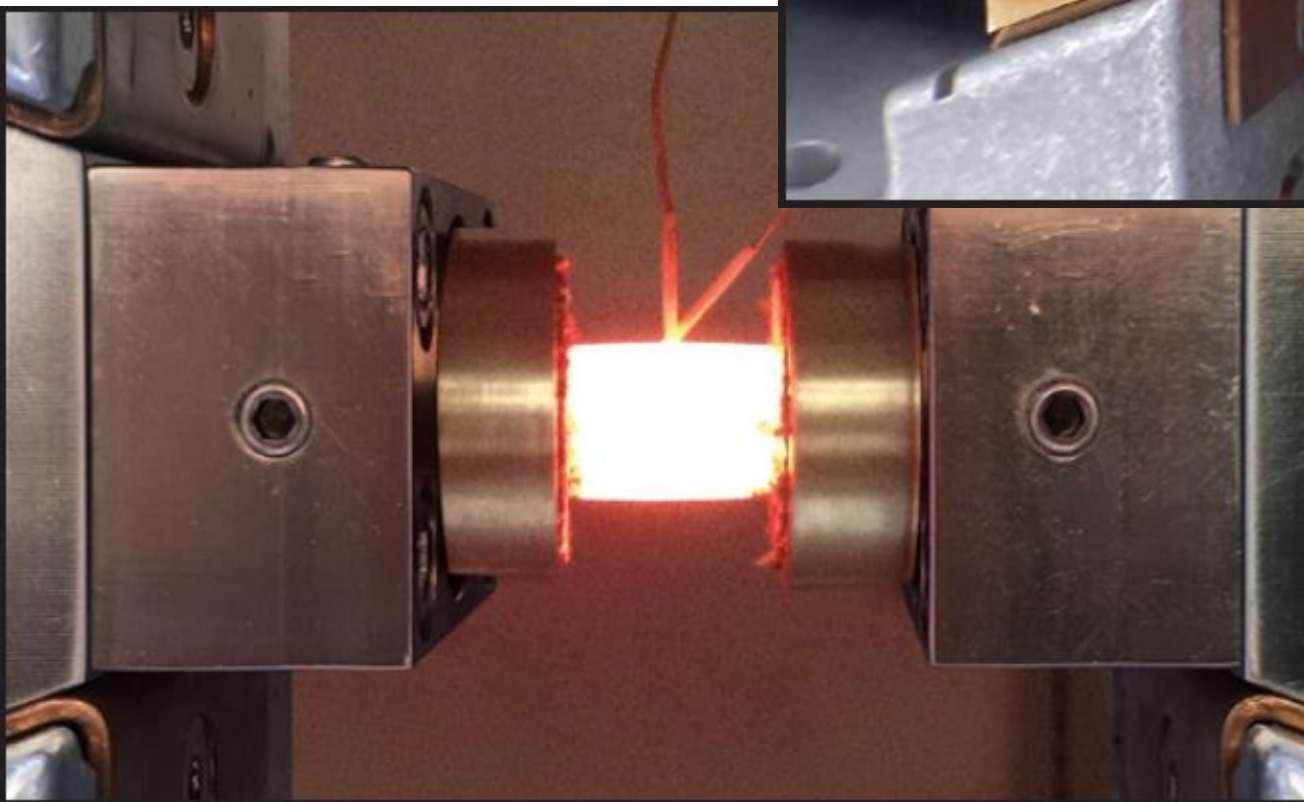
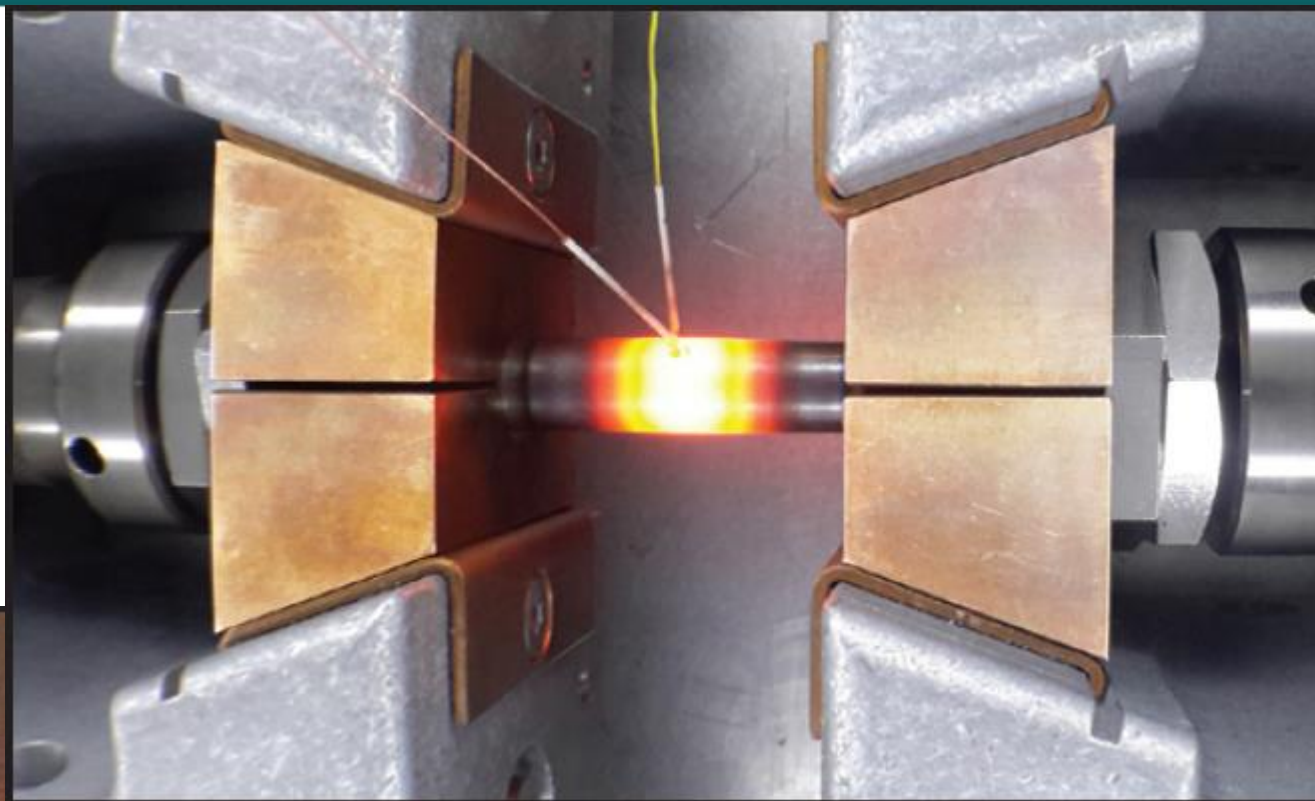
Egyenértékű képlékeny alakváltozás:

$$\varphi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{s_0}{s}$$

Alakítási szilárdság:

$$k_f = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{F}{bw}$$

Fizikai szimulátorok  
(Gleeble)



- <https://www.continuummechanics.org/>
- Han-Chin Wu: **Continuum Mechanics and Plasticity**
- Ziaja Gy.: **Alakítástechnika jegyzet**
- **Alakítástechnika (BMEGEMTBGL1)**
- **Anyagszerkezettan és anyagvizsgálat (BMEGEMTBGA1)**
- **Fémek technológiája (BMEGEMTBGF1)**
- William D. Callister Jr.: **Materials Science and Engineering: An Introduction**