

# Feszültségi állapot

Alakítótechnológiák elmélete  
(BMEGEMTNG00)

- Térfogati és felületi erők, feszültségtenzor
- Feszültségtenzor főértékei és főirányai
- Deviátoros feszültség
- Egyensúlyi és mozgásegyenletek

A testre ható erőket **felületre** és **térfogatra** ható erők csoportjába sorolhatjuk. Ezeket a felületre vagy térfogatra ható fajlagos erőkkel (**erősűrűség**) jellemezhetjük. Az erők hatására a test elmozdulhat és alakváltozást szenvedhet.

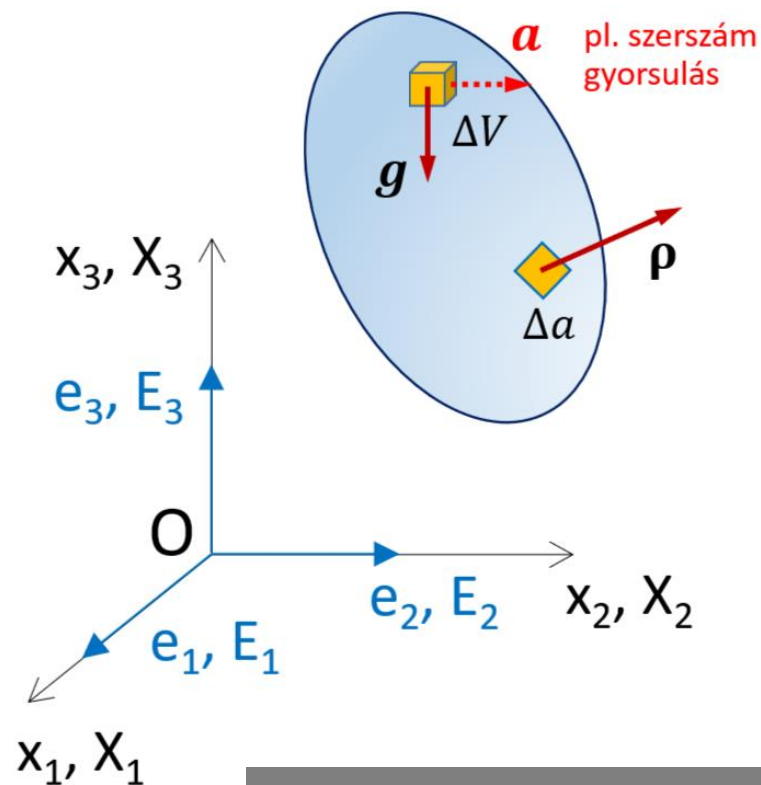
$$d\mathbf{t} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}}{\Delta V}$$

$\mathbf{g}$  – a  $\Delta V$  térfogatra ható erő  
 $\rho$  – a test sűrűsége  
 $d\mathbf{t}$  – fajlagos térfogati erő

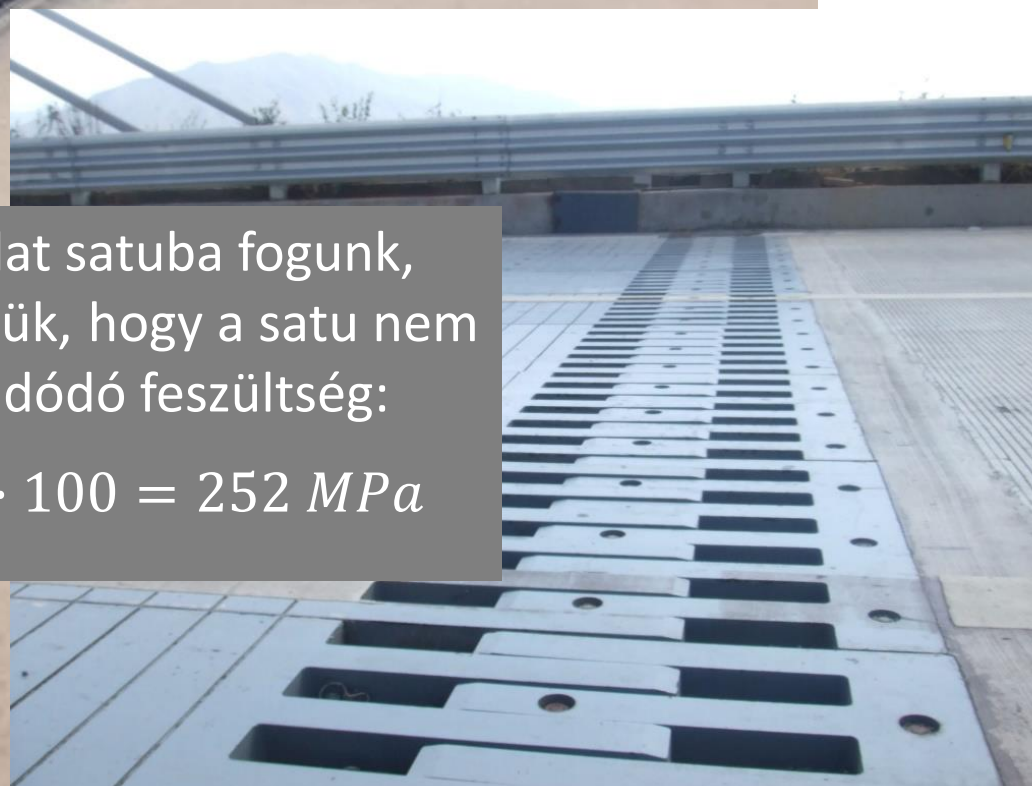
Mennyire fontosak a gyorsulásból, gravitációból származó erők az alakítástechnika szempontjából?

$$d\mathbf{f} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\Delta a}$$

$\boldsymbol{\rho}$  – felületi erő a  $\Delta a$  felületen  
 $d\mathbf{f}$  – fajlagos felületi erő



Az azonosító és a vonatkoztatási KR azonos kezdőpontú és orientációjú.

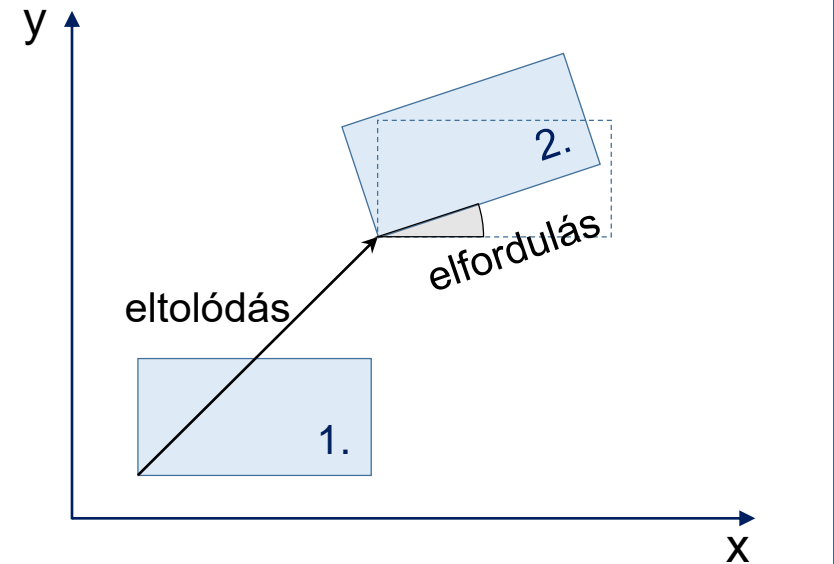


Ha egy 20 °C hőmérsékletű, zömök acélrudat satuba fogunk, majd 120 °C-ra felmelegítünk és feltételezzük, hogy a satu nem melegszik fel, akkor a gátolt hőtágulásból adódó feszültség:

$$\sigma_{\Delta T} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T = 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 252 \text{ MPa}$$

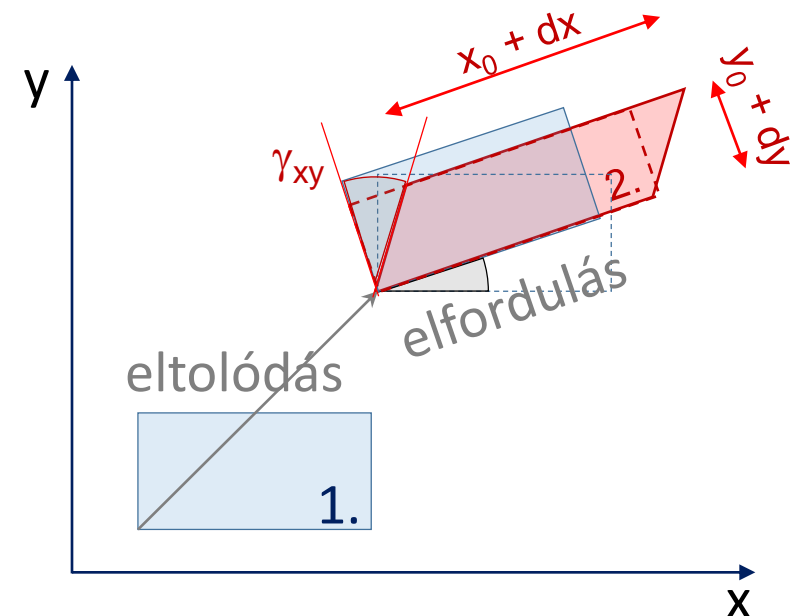
## statika

A **merev testet** az jellemzi, hogy pontjainak relatív távolsága a terhek hatására is változatlan marad. A merev testek **csak merevtestszerű elmozdulást** végeznek, amely egy eltolódás- és egy elfordulásvektorral jellemezhető.



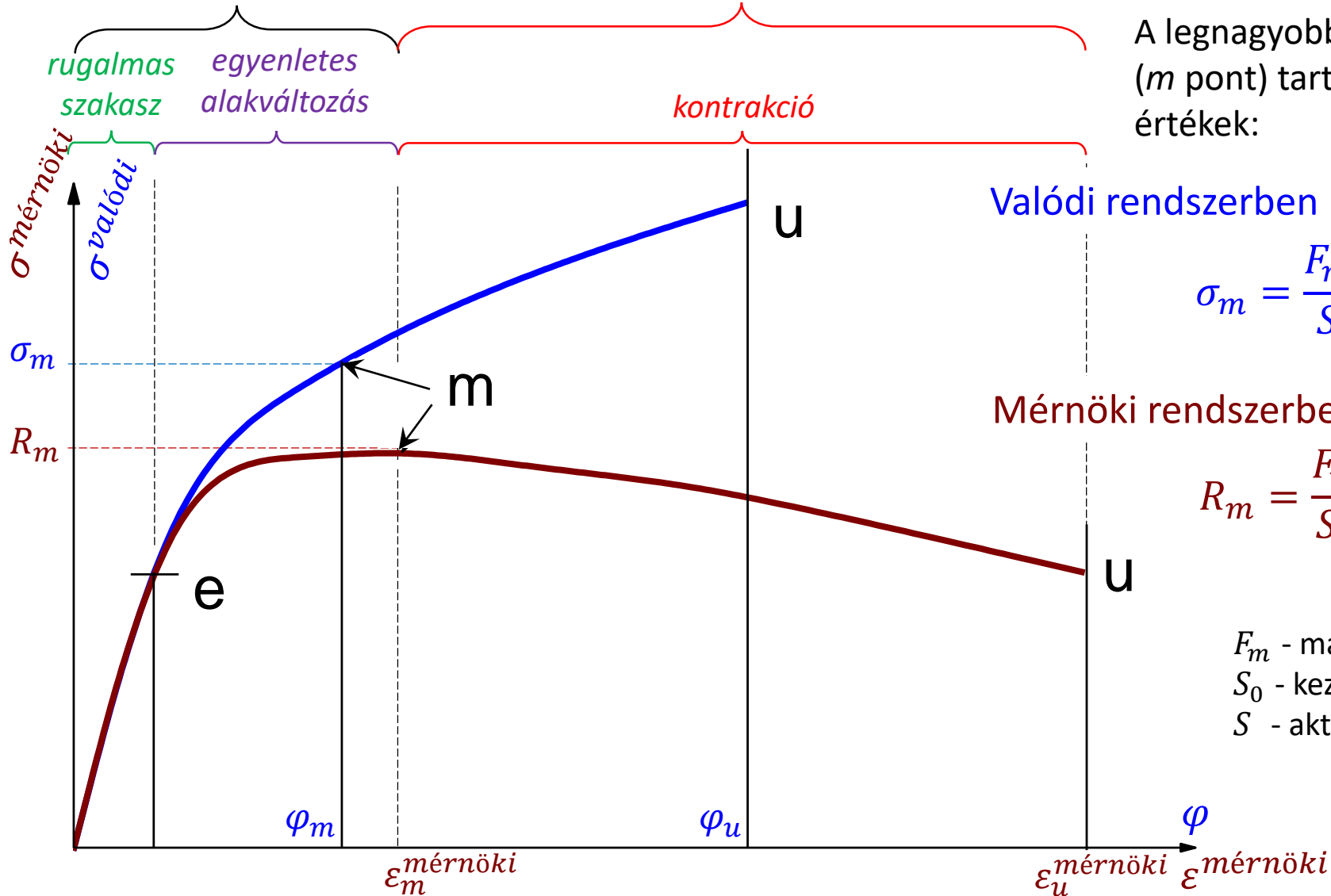
## szilárdságtan

A **szilárd testek** a külső terhek hatására **alakváltozásokat** szenvednek, melyek következtében *mind pontjaik relatív távolsága, mind az irányok relatív szöge* megváltozik. Ezzel egyidejűleg a test még merevtestszerű elmozdulást is végez. A szilárd testek a merevtestszerű eltolódáson és elforduláson túl alakváltozásokat is szenvednek.



egytengelyű  
fesz. állapot

*háromtengelyű feszültségi állapot*



A legnagyobb szakítóerőhöz ( $m$  pont) tartozó feszültség értékek:

Valódi rendszerben

$$\sigma_m = \frac{F_m}{S} = \frac{f_m}{a}$$

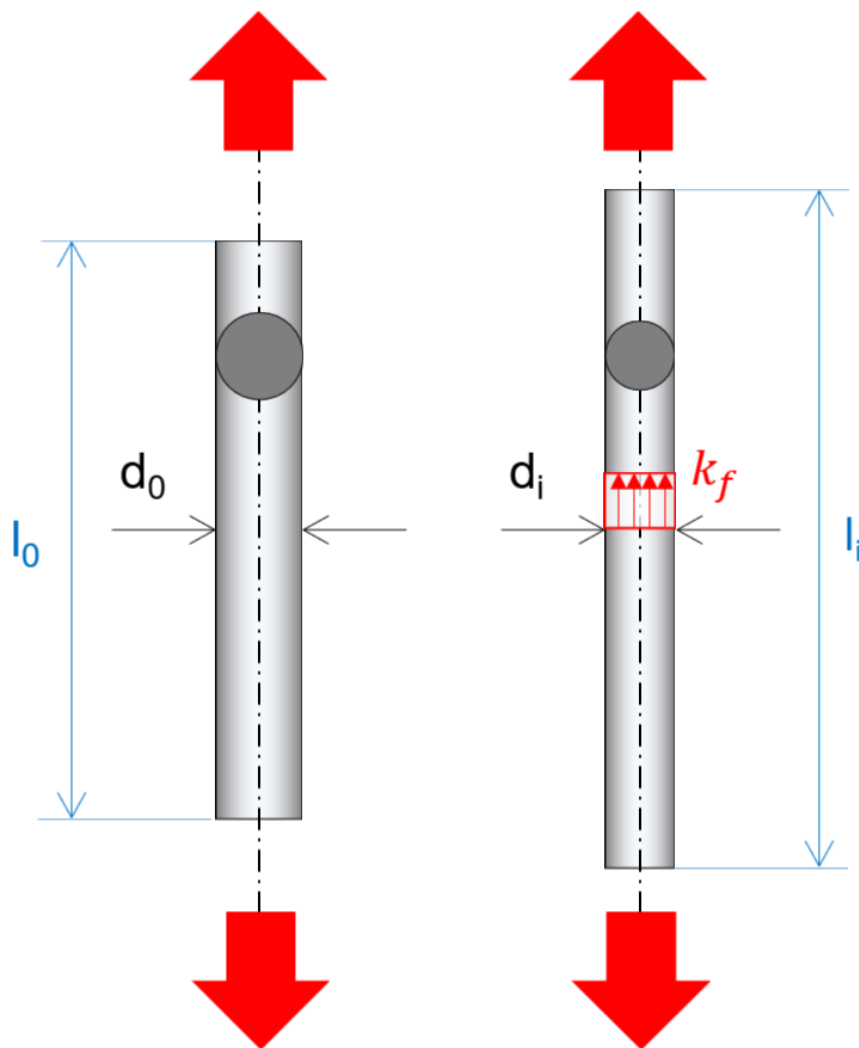
Mérnöki rendszerben

$$R_m = \frac{F_m}{S_0} = \frac{f_m}{a_0}$$

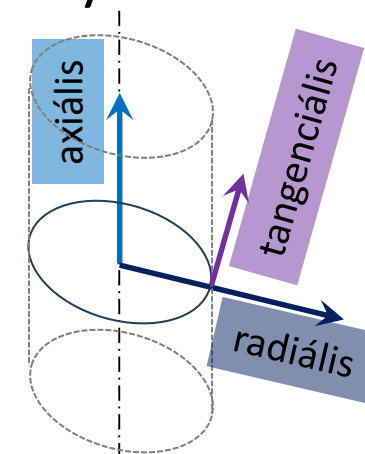
$F_m$  - maximális szakítóerő  
 $S_0$  - kezdeti keresztmetszet  
 $S$  - aktuális keresztmetszet



## Szakítóvizsgálat, egyenletes alakváltozások tartománya



- I = axiális irány
- II = radiális irány
- III = tangenciális irány



Feszültségek

$$\sigma_a = \frac{F}{A} = k_f$$

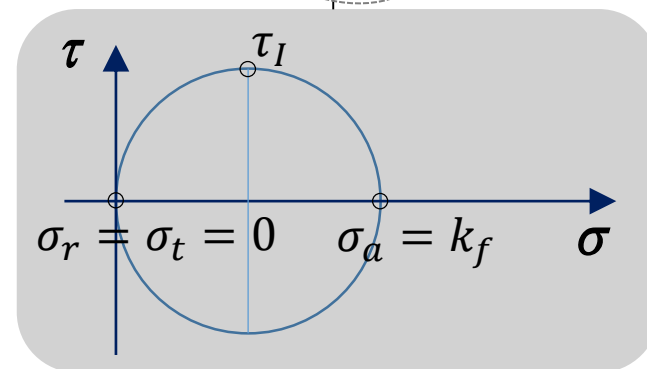
$$\sigma_r = \sigma_t = 0$$

Alakváltozások

$$\varphi_a = \ln \frac{l_1}{l_0}$$

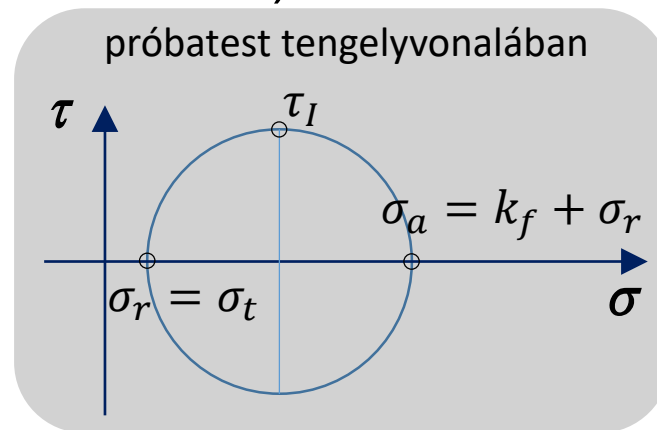
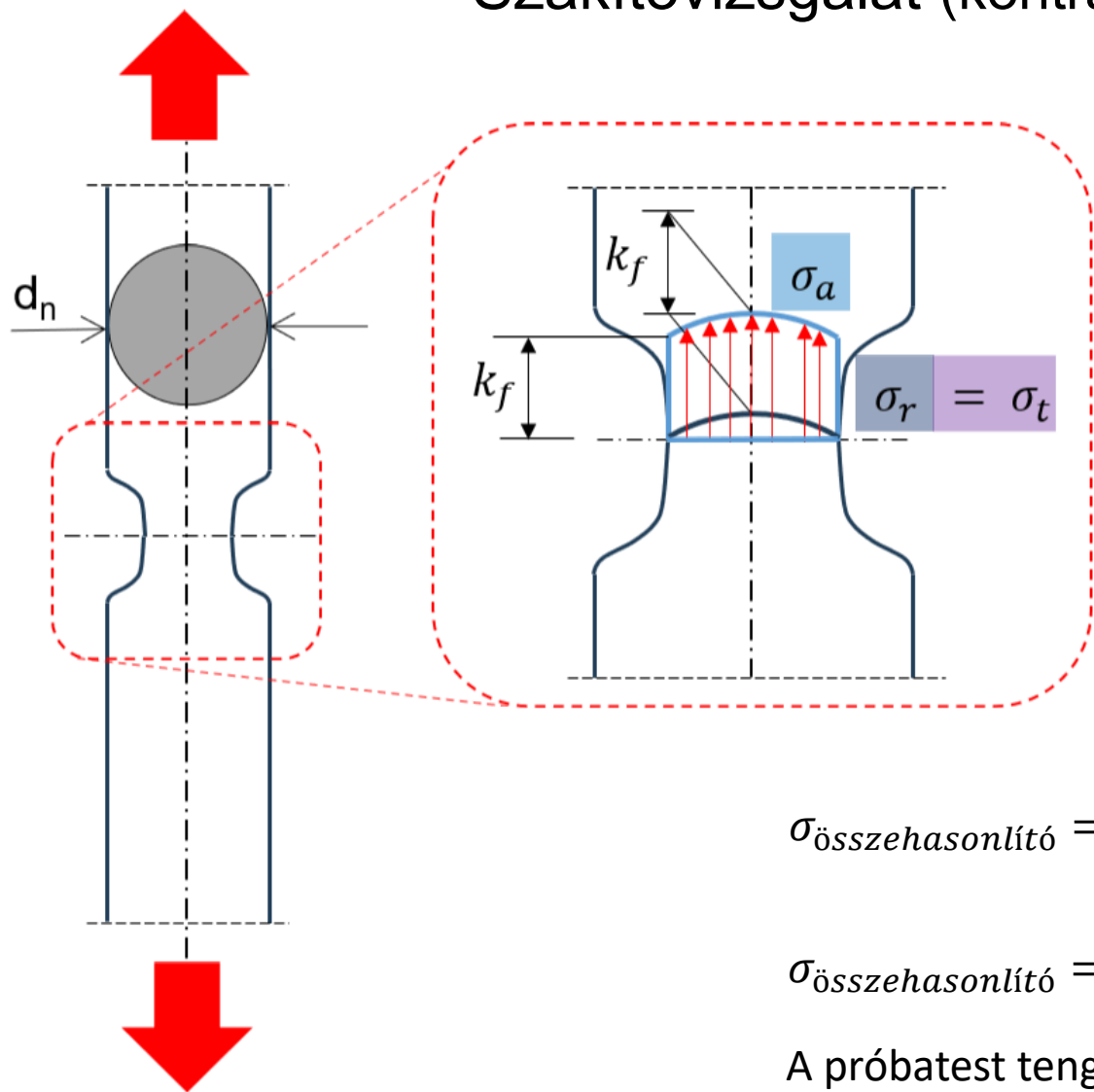
$$\varphi_r = \varphi_t = -\frac{1}{2} \varphi_a$$

$$\varphi_{\text{egyenértékű}} = \varphi_a$$



$$\bar{\varphi}_{\text{egyenértékű}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\varphi_I^2 + \varphi_{II}^2 + \varphi_{III}^2)}$$

## Szakítóvizsgálat (kontrakciós szakasz)



A próbatest felületén, a húzott keresztmetszet kerületén, **egytengelyű feszültségi** állapot van:

$$\sigma_a = k_f$$

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_t = 0$$

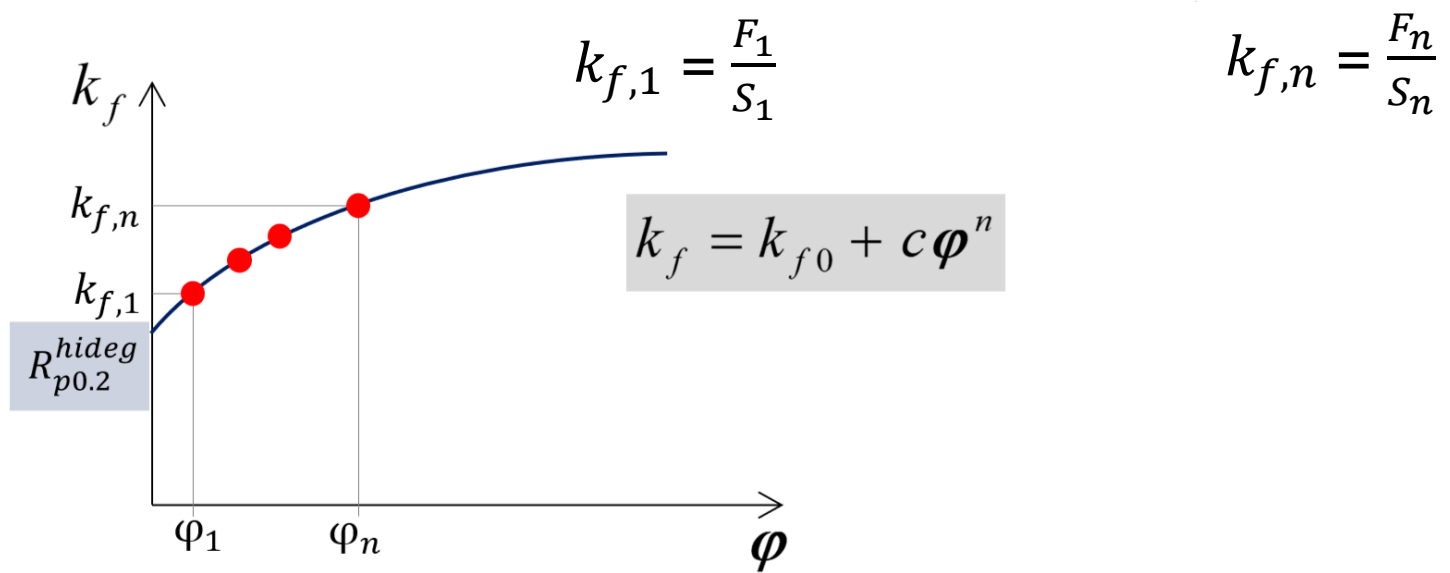
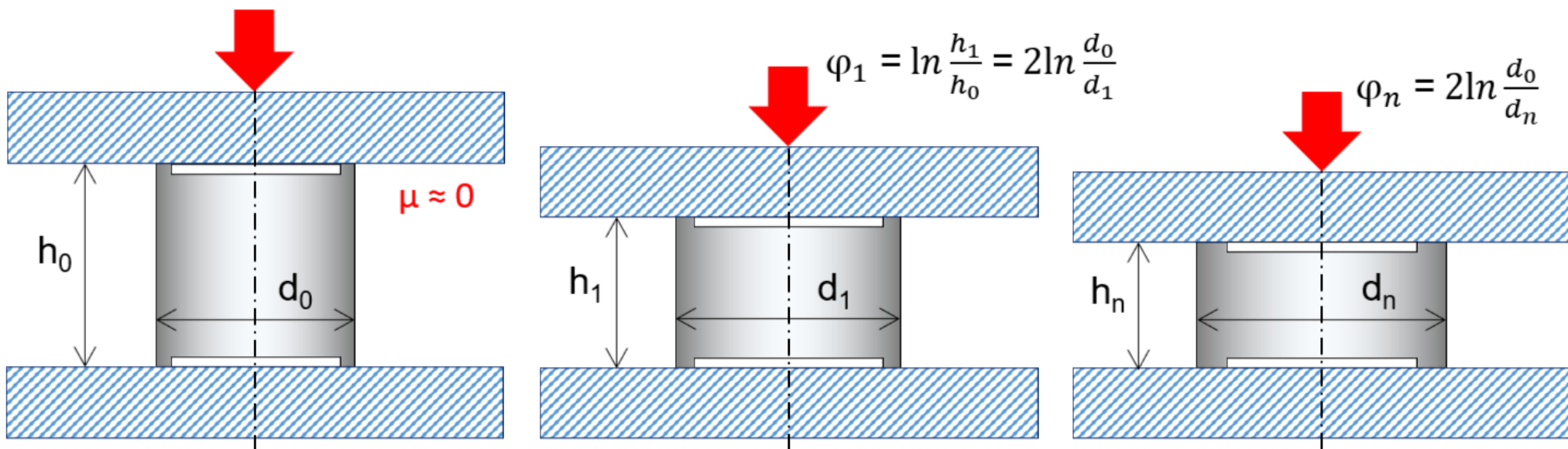
$$\sigma_{\text{összehasonlító}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_a - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_a)^2]}$$

$$\sigma_{\text{összehasonlító}} = \sqrt{\frac{1}{2} [k_f^2 + 0 + k_f^2]} = k_f$$

A próbatest tengelyvonalában, a húzott keresztmetszet közepén, **egytengelyű alakváltozási** állapot van.



### Egytengelyű zömítéssel



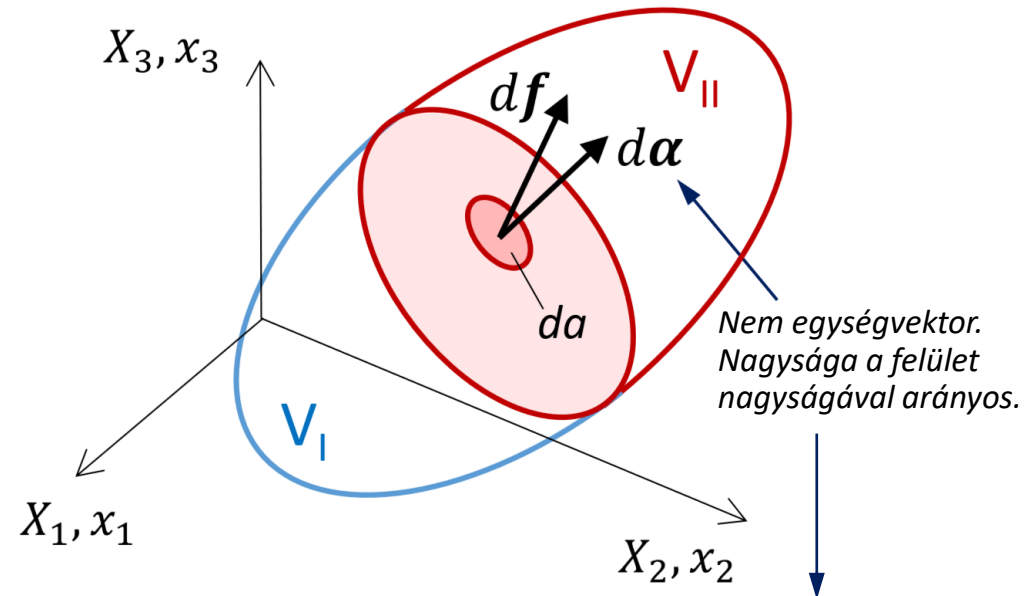
A feszültségtenzonnal a testen belüli erőviszonyokat írjuk le.

A gondolatban szétvágott test vágott felületére olyan erőket definiálunk, amelyek az eredetivel megegyező alakváltozást, illetve mozgást eredményeznek.

Ezen a felületen egy kiválasztott pontban a  $d\alpha$  vektorral definiált  $da$  nagyságú felületelemre  $df$  erővektor hat.

Ebben az esetben a  $\sigma$  feszültségtenzor a  $d\alpha$  és a  $df$  közötti kapcsolatot adja meg.

$\sigma_{ij}$ ,  $\sigma$  - Cauchy-féle feszültség tenzor



$$df_i = \sigma_{ij} d\alpha_j \quad \text{vagy} \quad d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\alpha}$$

$$df_1 = \sigma_{11} d\alpha_1 + \sigma_{12} d\alpha_2 + \sigma_{13} d\alpha_3$$

$$df_2 = \sigma_{21} d\alpha_1 + \sigma_{22} d\alpha_2 + \sigma_{23} d\alpha_3$$

$$df_3 = \sigma_{31} d\alpha_1 + \sigma_{32} d\alpha_2 + \sigma_{33} d\alpha_3$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

**$\sigma$**  Cauchy-féle feszültségtenzor  
*valódi feszültség*

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{a}$$

erő a pillanatnyi konfiguráción

felületelem a pillanatnyi konfiguráción

**$P$**  I. Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor  
*mérnöki feszültség*

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P} d\mathbf{A} = \mathbf{P} d\mathbf{a}_0$$

felületelem a kezdeti konfiguráción

**$S$**  II. Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{S} d\mathbf{A} = \mathbf{S} d\mathbf{a}_0$$

erő a kezdeti konfiguráción

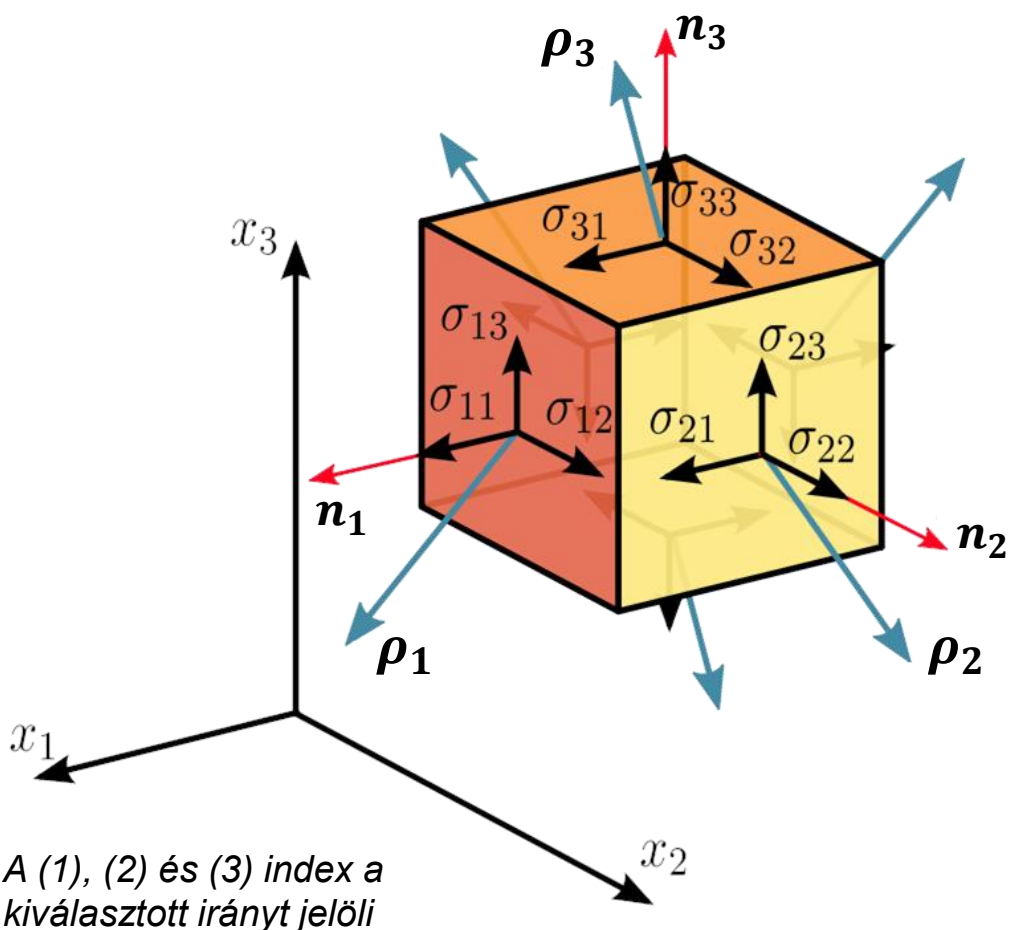
Az *egységnyi felületre vonatkozó* feszültség ( $\rho$  feszültségvektor) az elemi erővektor és a  $da$  felület hányadosa:

$$\frac{d\mathbf{f}}{da} = \boldsymbol{\rho}$$

Így a kiválasztott pontban az adott felületre ható feszültségvektor:

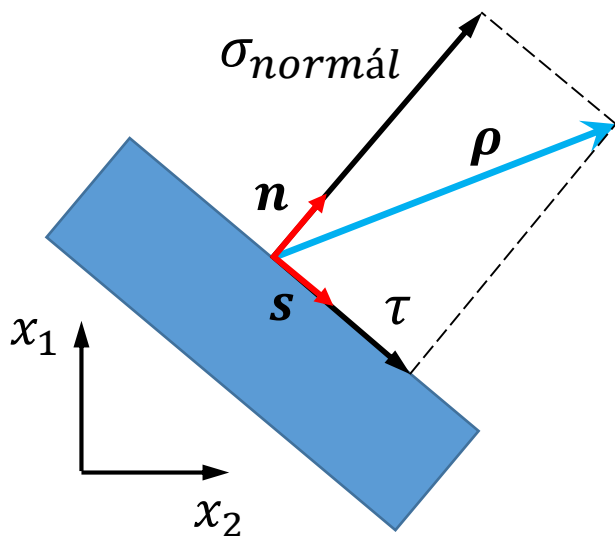
$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

$\boldsymbol{\rho}$  feszültségvektor  
 $\boldsymbol{\sigma}$  feszültség tenzor  
 $\mathbf{n}$  egységvektor (hossza egységnyi, a kiválasztott sík normálisa)



A választott anyagi pontban, az  $\mathbf{n}_1$  normálirányú egységnyi felületre  $\rho_1$  feszültségvektor hat, ami  $\sigma_{11}$  normál feszültségkomponense és  $\sigma_{12}, \sigma_{13}$  tangenciális komponensekre bontható.

## Normál- és tangenciális feszültségek



A felületre ható feszültségvektor:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

$$\rho_i = \sigma_{ij} n_j$$

A feszültségvektor normál irányú vetülete:

$$\sigma_{normál} = \boldsymbol{\rho} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \mathbf{n}$$

$$\sigma_{normál} = \rho_i n_i = \sigma_{ij} n_j n_i$$

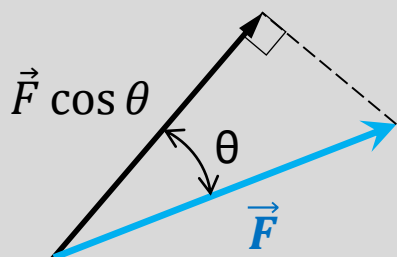
$$\begin{aligned} \sigma_{normál} = & \sigma_{11}n_1n_1 + \sigma_{12}n_2n_1 + \sigma_{13}n_3n_1 + \\ & \sigma_{21}n_1n_2 + \sigma_{22}n_2n_2 + \sigma_{23}n_3n_2 + \\ & \sigma_{31}n_1n_3 + \sigma_{32}n_2n_3 + \sigma_{33}n_3n_3 \end{aligned}$$

A feszültségvektor érintő irányú vetülete:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\rho} \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \mathbf{s}$$

$$\tau = \rho_i s_i = \sigma_{ij} n_j s_i$$

$$\begin{aligned} \tau = & \sigma_{11}n_1s_1 + \sigma_{12}n_2s_1 + \sigma_{13}n_3s_1 + \\ & \sigma_{21}n_1s_2 + \sigma_{22}n_2s_2 + \sigma_{23}n_3s_2 + \\ & \sigma_{31}n_1s_3 + \sigma_{32}n_2s_3 + \sigma_{33}n_3s_3 \end{aligned}$$



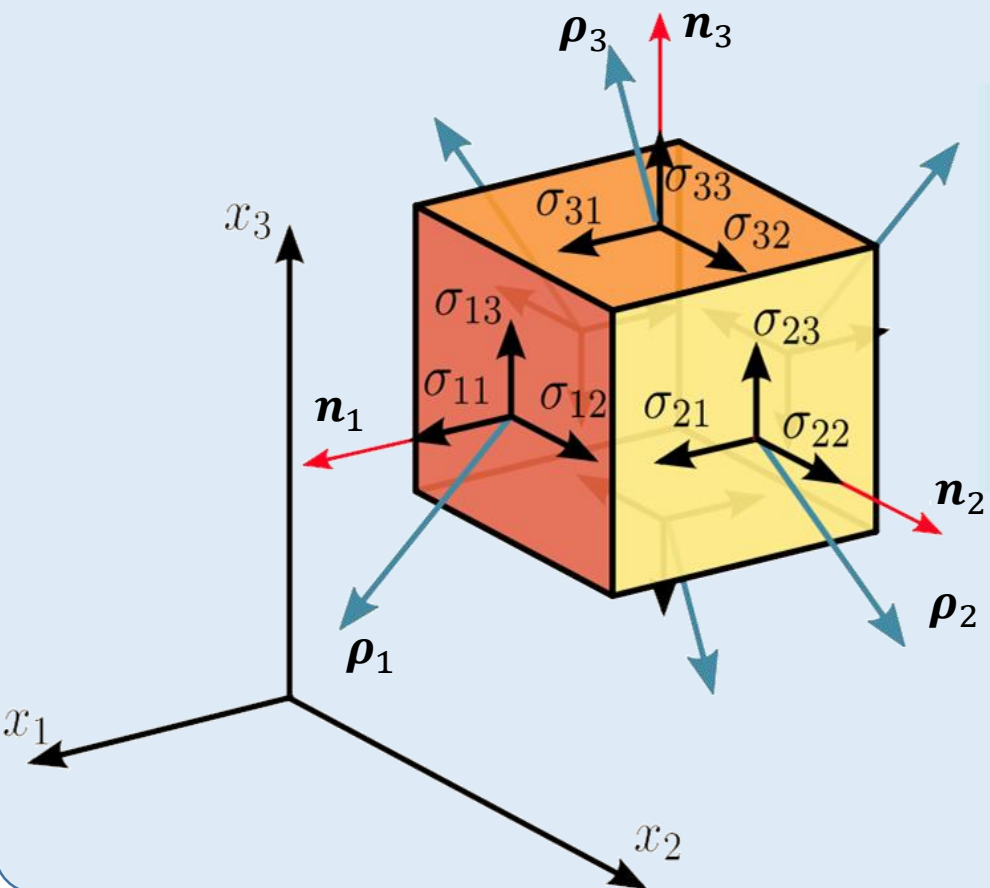
Skalárszorzat:  $\vec{F} \cdot \vec{n} = |\vec{F}| \cdot |\vec{n}| \cos \theta$

# Feszültségtenzor főirányai



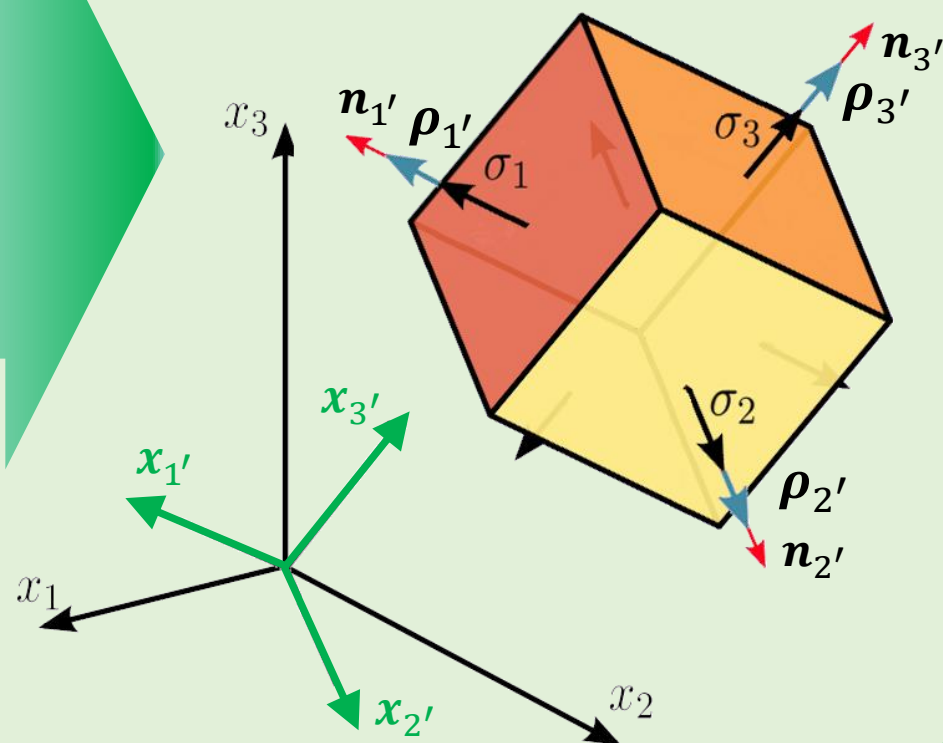
Feszültségtenzor egy adott koordináta-rendszerben ( $x_1, x_2, x_3$ ):

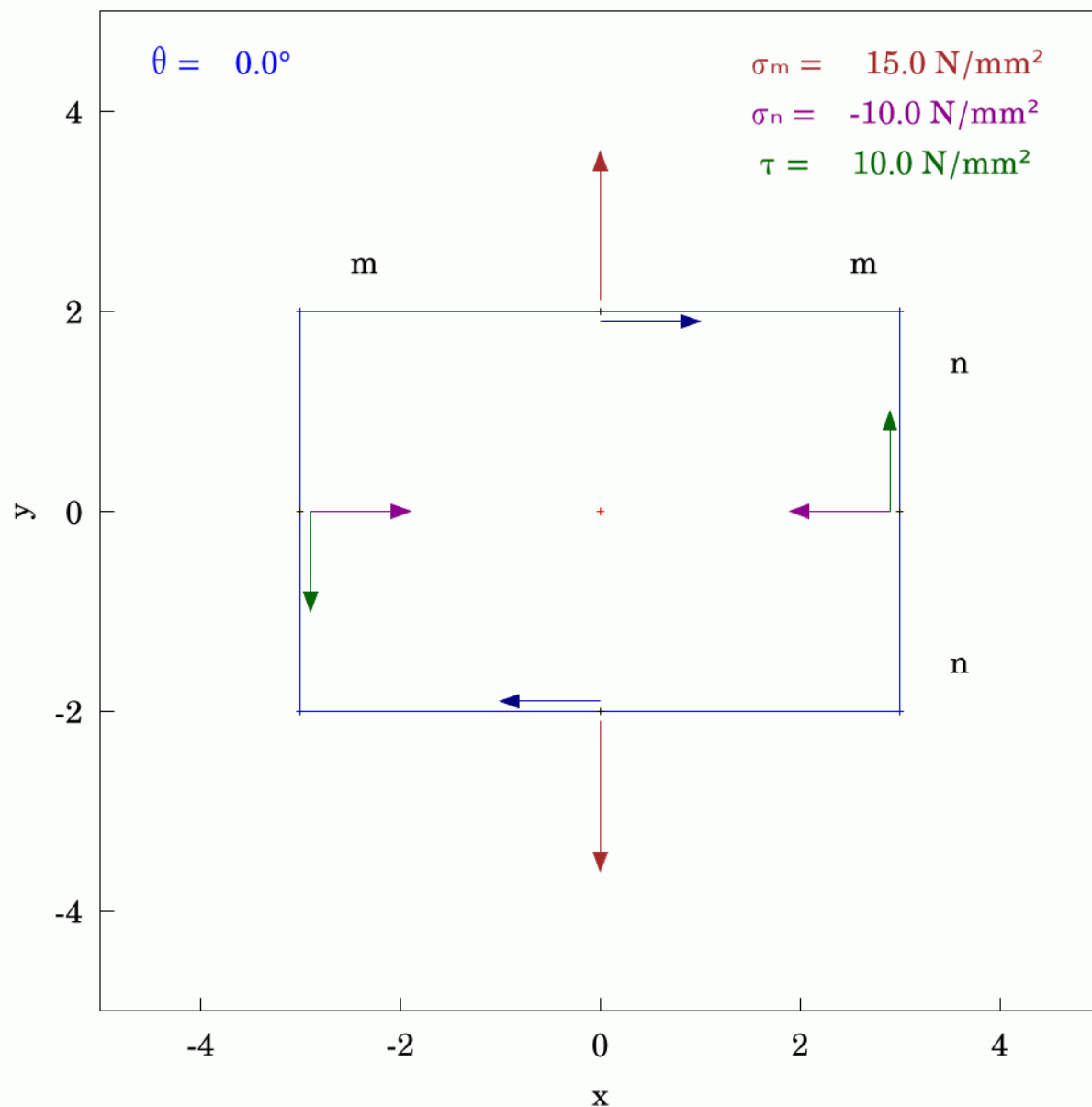
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



Feszültségtenzor a **főirányok** koordináta-rendszerében ( $x_1', x_2', x_3'$ ):

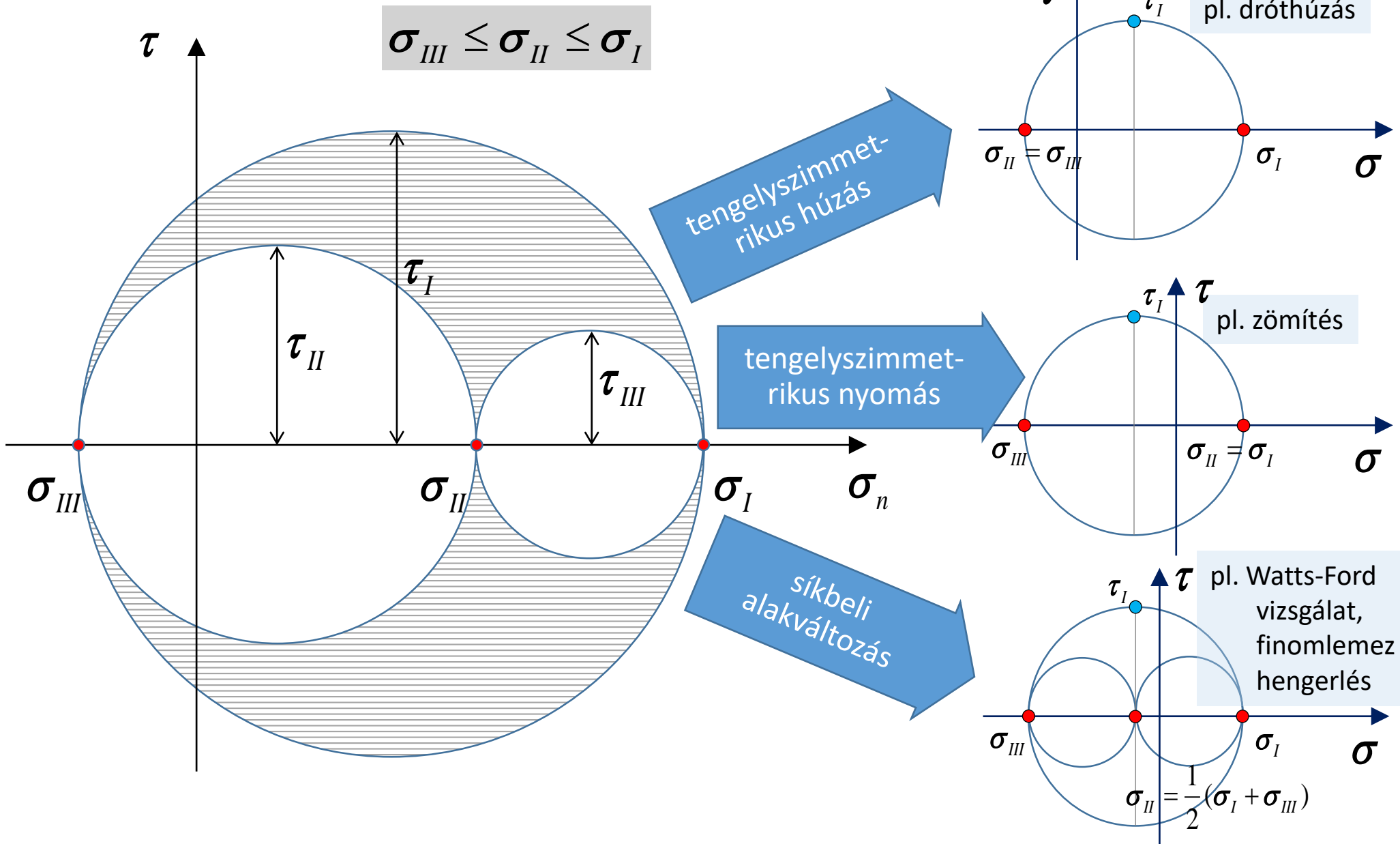
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$





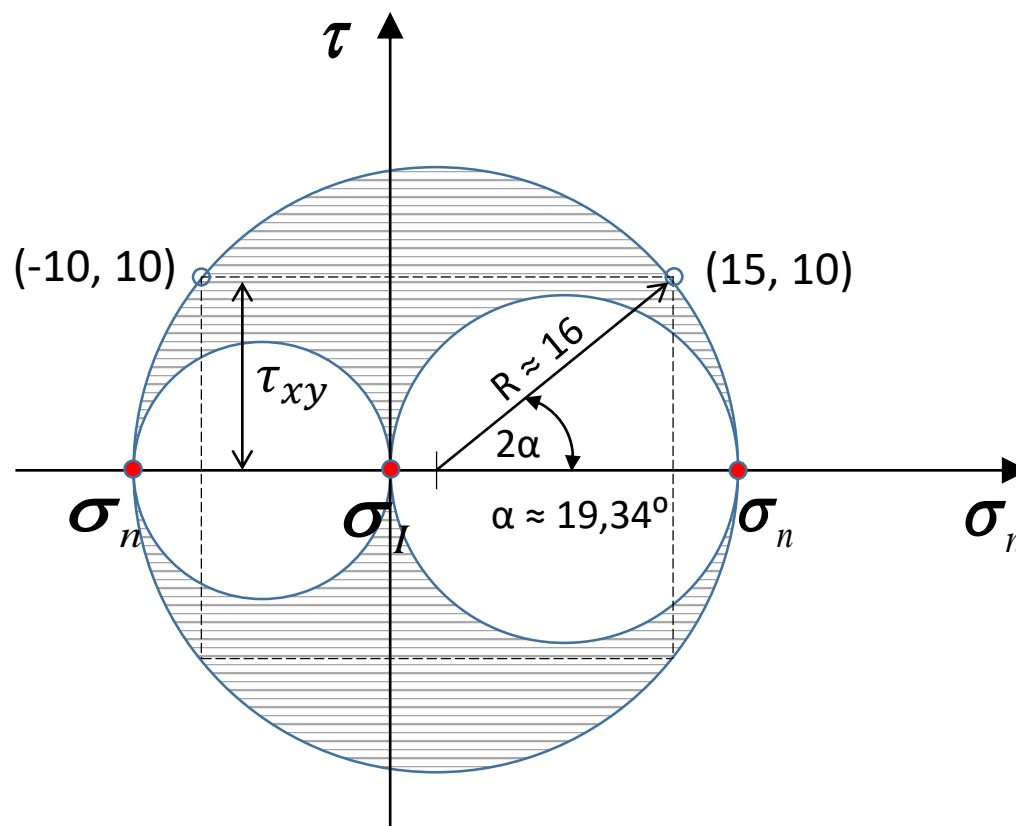
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} MPa = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 10 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$$



$$-13,5 MPa \leq 0 MPa \leq 18,5 MPa$$

# Deviátoros feszültség

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \boxed{\sigma_{ij}^s} + \boxed{s_{ij}} = \boxed{\sigma_s \delta_{ij}} + \boxed{s_{ij}}$$

Kronecker delta

$\delta_{ij} = 1$ , ha  $i = j$

$\delta_{ij} = 0$ , ha  $i \neq j$

gömbtenzor, hidrosztatikus komponens

deviátor tenzor, a hidrosztatikus állapottól való eltérés

$$\sigma_s = \sigma_0 = \text{átlagos normálfeszültség } \sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

$$\sigma_{ij} = \boxed{\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}} + \boxed{\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma'_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix}}$$

gömbtenzor

deviátor tenzor

A hidrosztatikus feszültségi állapot csak rugalmas térfogatváltozással jár.  
A képlékeny alakváltozás szempontjából csak a feszültségdeviátor érdekes.



$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}' \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \text{vagy} \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$$

A  $\boldsymbol{\sigma}'$  deviátor tenzor a hidrosztatikus feszültségállapottól való eltérést mutatja.

A  $\sigma_0$  hidrosztatikus komponens nem okoz képlékeny alakváltozást.

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{I_1}{3} \quad \text{Az } I_1 \text{ az első skalár invariáns.}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ik} \sigma'_{ik}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{22} - \sigma'_{33})^2 + (\sigma'_{11} - \sigma'_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ik} \sigma'_{ik}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ik} \sigma_{ik}}$$

Az egyenértékű feszültség egy skalár mennyiséggel jellemzi a feszültségi állapotot.

Az egyenértékű feszültség megmutatja, hogy az aktuális feszültségi állapot, egytengelyű feszültségi állapot esetében mekkora terhelésnek feleltethető meg.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 \pm I_2\sigma - I_3 = 0$$

A harmadfokú egyenlet gyökei a főfeszültségek ( $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ ), az egyenletben szereplő együtthatók ( $I_1, I_2, I_3$ ) a feszültségi tenzor skalár invariánsai.

*Általános esetben*

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

*Főfeszültségekkel*

$$I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2 = -(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I)$$

$$I_3 = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$$

# Egyensúlyi és mozgásegyenletek

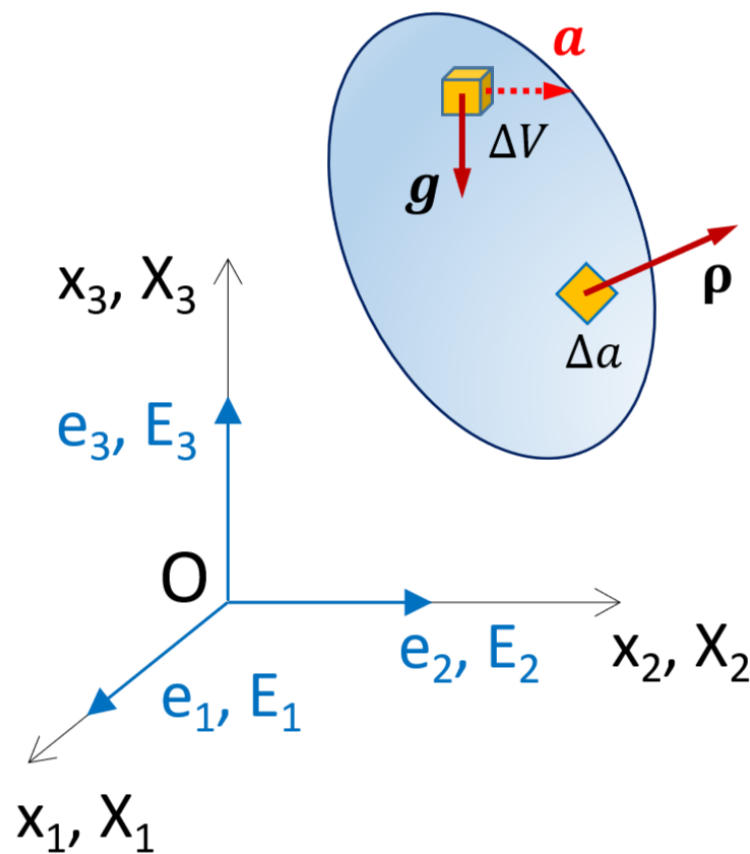
A  $V$  térfogatú  $A$  felületű alakváltozásra képes test egyensúlyi állapotának feltétele, ha az adott testre felületi és térfogati erőrendszer hat:

*A test felületén ható fajlagos (külső) erők meg kell hogy egyezzenek az ott jelen lévő feszültségvektorral.*

$$\int_V \varrho \mathbf{t} dV + \int_A \boldsymbol{\rho} da = 0$$

$$\int_V \varrho \mathbf{t} dV + \int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

$\varrho$  – a test sűrűsége  
 $\mathbf{t}$  – fajlagos térfogati erő  
 $\boldsymbol{\rho}$  – fajlagos felületi erő



A  $V$  térfogatú  $A$  felületű alakváltozásra képes test egyensúlyi állapotának feltétele, ha az adott testre felületi és térfogati erőrendszer hat:

$$\int_V \rho \mathbf{t} dV + \int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

$\rho$  – a test sűrűsége  
 $\mathbf{t}$  – fajlagos térfogati erő  
 $\boldsymbol{\rho}$  – fajlagos felületi erő

Gauss–Osztrohadszkij-tétel alkalmazásával

$$\int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dV$$

$$\int_V (\rho \mathbf{t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) dV = 0 \quad \leftarrow \text{Így elég csak a térfogatot vizsgálni.}$$

A test teljes térfogatára és bármelyik rész-térfogara is igaz kell, hogy legyen.

$$\rho \mathbf{t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$$

$$\rho t_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

*A tétel szerint tetszőleges  $F$  zárt felület által határolt  $V$  térfogatban definiált nem szinguláris  $V(x)$  vektormezőre fennáll, hogy  $V$  divergenciájának térfogati integrálja megegyezik a (normális)  $F$  felületelem és  $V$  skaláris szorzatának integráljával.*

Ha a test mozog:

$$\rho \mathbf{t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\rho t_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \frac{dv_i}{dt}$$

Ahol  $\mathbf{v}$  - sebesség  
 $\rho$  - sűrűség

ld. később: anyagtörvény

Descartes-féle (derékszögű) koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \varrho t_1 &= \varrho \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \varrho t_2 &= \varrho \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \varrho t_3 &= \varrho \frac{dv_3}{dt} \end{aligned}$$

gyorsuló  
testre

$x(x_1, x_2, x_3, t)$

$\sigma(x_1, x_2, x_3, t)$

$v(x_1, x_2, x_3, t)$

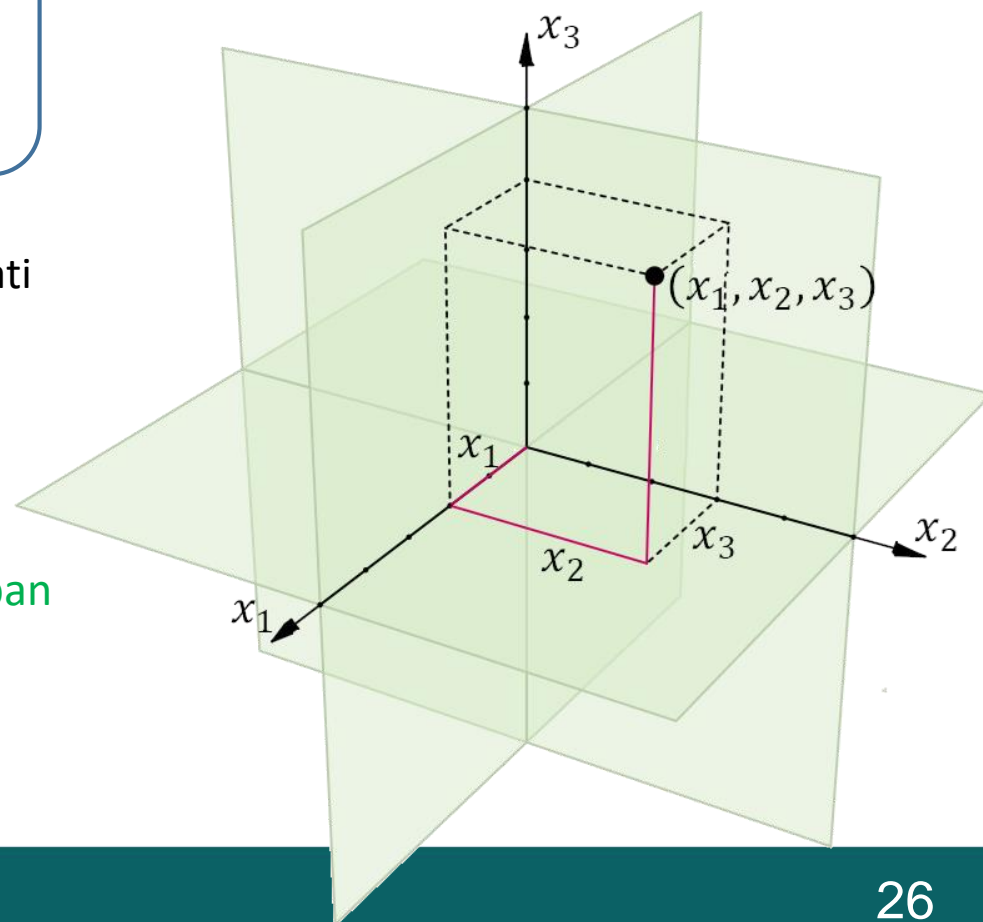
koordináták

$x_1, x_2, x_3$

Statikai egyensúlyi egyenlet.  
Időben állandósult folyamat, a térfogati  
erők elhanyagolásával.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$

egyensúlyban  
lévő testre





## Hengerkoordináta-rendszerben

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} + \rho t_r = \rho \frac{dv_r}{dt}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial x_3} + \rho t_\phi = \rho \frac{dv_\phi}{dt}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho t_z = \rho \frac{dv_z}{dt}$$

Statikai egyensúlyi egyenlet.  
Időben állandósult folyamat, a térfogati erők elhanyagolásával.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0$$

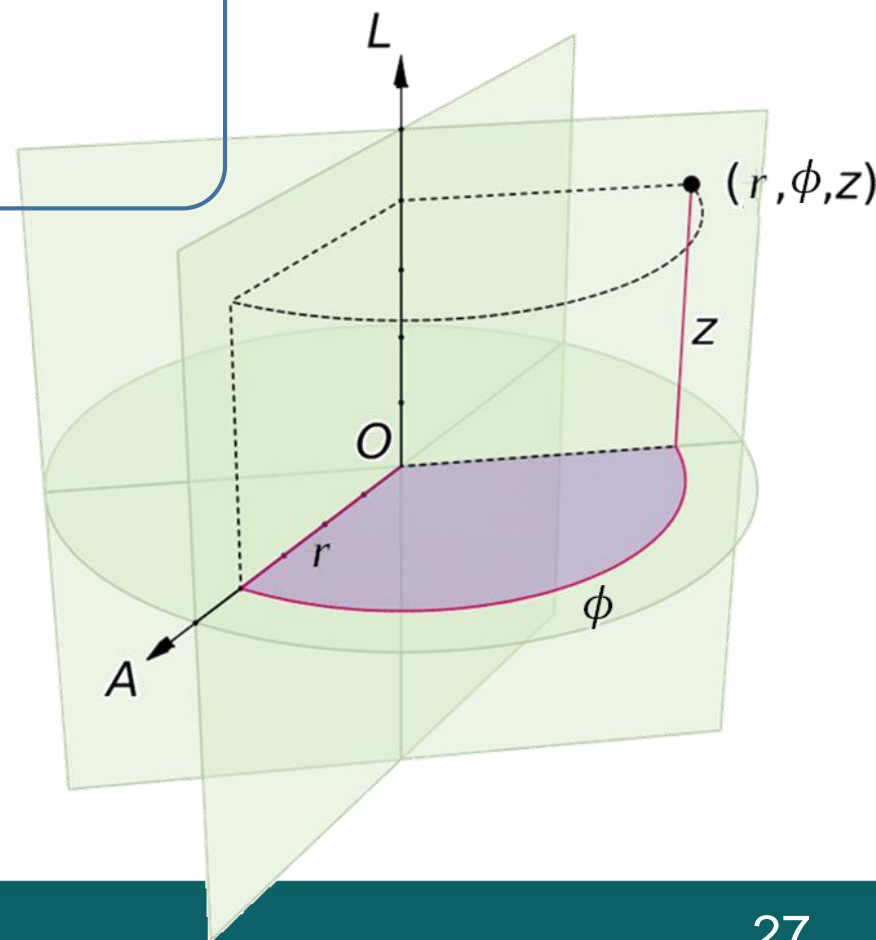
$$\frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

egyensúlyban  
lévő testre

$x(r, \phi, z, t)$   
 $\sigma(r, \phi, z, t)$   
 $v(r, \phi, z, t)$

**koordináták**  
 $r, \phi, z$



Köszönöm a figyelmet!

- <https://www.continuummechanics.org>
- Kozák Imre, Szeidl György, Tenzorszámítás indexes jelölésmódban
- Han-Chin Wu: Continuum Mechanics and Plasticity
- Continuum Mechanics Examples by Dr. Attila Kossa