

Strukturintegritäts-Anwendungen 2

Dr. Prodán Miklós János

Titular-Univ.-Dozent

MéRNÖKI szerkezetek integritása 2 német nyelvű
kurzus: **Dickwandiger Behälter** (Tárgyfelelős: Dr.
habil. Májlinger Kornél, tszv. egyet. docens,
“Materialkunde” & “Metalltechnologie”)

2021/2022/2

Der dickwandige Behälter

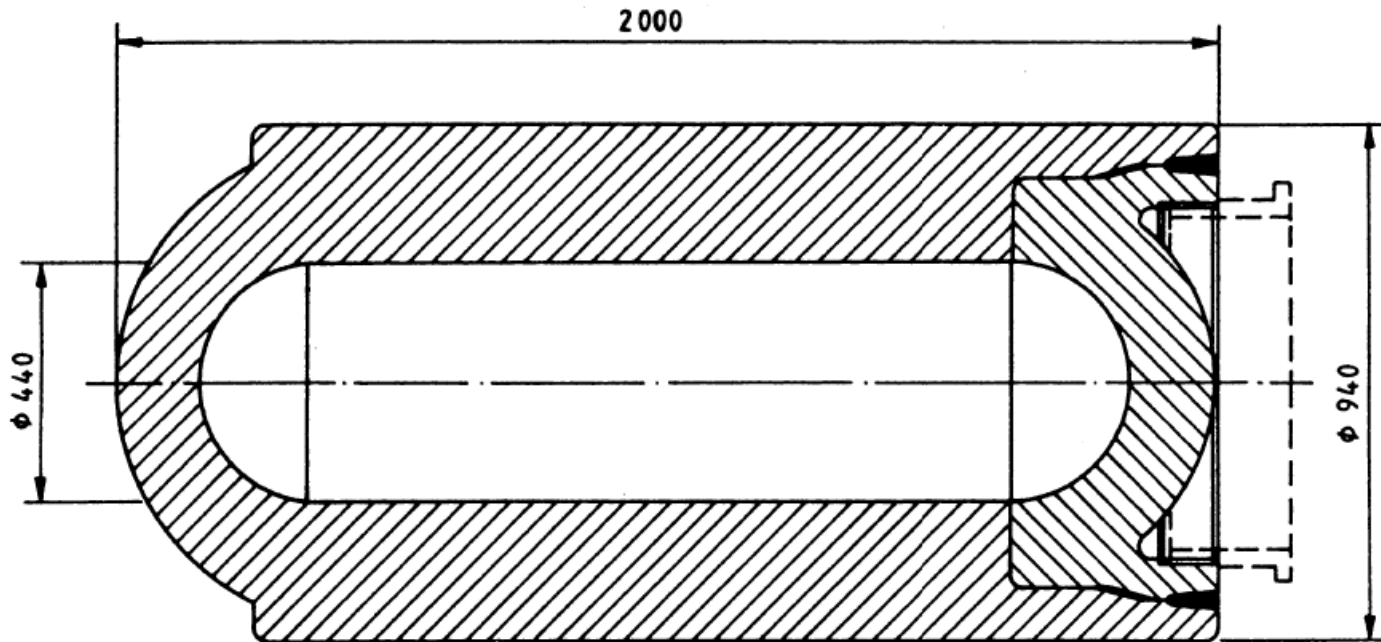


Fig. 1 Geometry of the Thick-Walled Vessel

Versagenswahrscheinlichkeits-Berechnungen

EXAMPLE "THICK WALLED CONTAINER"

A probabilistic failure analysis had to be performed for a container carrying highly toxic contents [1]. In Fig. 1 the geometry and the most important dimensions are shown, Fig. 2 shows the nomenclature and the assumptions made for the probabilistic analysis. The material assumed was cast steel GS 50.

PROBABILITY OF FAILURE BY BUCKLING

The deterministic calculations are the basis of the following probabilistic analysis. The allowable maximum pressure $p_{buckl,z}$ was determined to be 400 bar. The actual external pressure p is 300 bar. The trivial criteria of non failure $p < p_{buckl,z}$ is satisfied.

For the probabilistic analysis the symbols of Fig. 2 were used and the following assumptions were made:

$$R_0 = 2000 \text{ bar (5 x (} p_{buckl,z} = 400 \text{ bar))}$$

$$S_0 = 220 \text{ bar (< } p = 300 \text{ bar)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_R = 220 \text{ bar} \\ \sigma_S = 50 \text{ bar} \end{array} \right\} \text{standard deviations of R and S (or } p_{buckl,z} \text{ and } p)$$

The failure quotient p_f is calculated with the additional assumption of standard distribution and tabulated values from reference books.

$$p_f = \Phi \left(- \frac{R_0 - S_0}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) = \Phi (-7.9) = 0.15 \cdot 10^{-14} \quad (1)$$

Eq. 1 is based on the general eqs. (2) and (3) where p_f is expressed by the integral

$$p_f = F_v(1) = P(R < S) = \int_0^{\infty} F_r(x) \cdot f_s(x) dx \quad (2)$$

$$F_r(x) = P(0 < R < x) = \int_0^x f_r(\zeta) d\zeta \quad (3)$$

The probability of failure $F_1(t)$ in the time interval (0, t) is:

$$F_1(t) = 1 - \left[\int_0^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} p_r(t) \left\{ F_s(x) \right\}^r \cdot f_r(x) dx \right] \quad (4)$$

With the help of the reduced equations derived from eq. (4) $F_1(t)$ is calculated. The method is extensively explained in [1]. However, [1] contains two computational approximations shown in eq. (5) and (6).

$$F_1(t) \approx 1 - (1 - p_f)^t \quad (5)$$

$$F_1(t = 1000 \text{ years}) \approx 1.5 \cdot 10^{-12}$$

$$F_1(t) \approx 1 - \exp(-p_f \cdot t) \quad (6)$$

$$F_1(t = 1000 \text{ years}) \approx 1.5 \cdot 10^{-12}$$

The quoted results are explained and commented in Ref. [1]. Due to the extent of reasoning necessary only the additional comment to [1] should be made that a probabilistic reliability analysis is difficult for two reasons:

- there is a variety of technical equipment to consider
- each component is exposed to a variety of influences and mechanism which can lead to failure.

Failure data and statistics from the conventional pressure vessel industry were used for comparison with these theoretical results of the probabilistic analysis.

Normalverteilungen der Last- und Versagenswerte

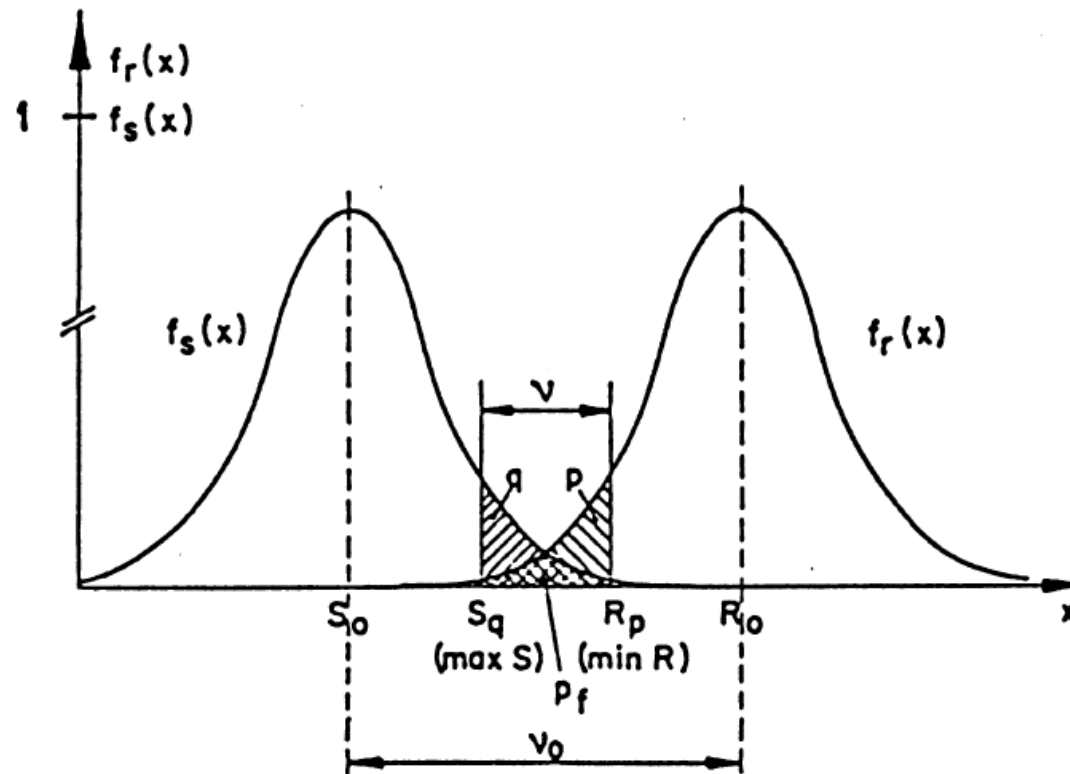


Fig. 2 Probability Density Functions of the Load and the Structural Resistance with Related Notations

Diskussion der Resultate und Symbolliste zu Folie 4, Fig. 2

on a cycle by cycle basis. In another case, statistical methods may be applied to near-threshold and short crack fatigue behaviour. When the plastic zone size is of the order of the microstructure size, fatigue crack growth cannot be considered as a continuum process. If the crack front is long, and the number of cycles large (e. g. in a conventional long-crack threshold test) the observed macroscopic crack growth rate may still be a function of a continuum mechanics parameter such as ΔK , but individual crack advance increments may not. In the case of physically small cracks, more complicated analyses may be required [3].

DISCUSSION

Aspects of probabilistic failure analysis, deterministic stress analysis and fracture mechanics analysis of components have been discussed. An attempt shall be made to connect these three analytical methods.

Even though only partial aspects have been considered, a general solution for the analysis of complex components seems possible.

It is obvious that these are not only partial problems but overall and interdisciplinary tasks.

A common problem is that a component is sometimes analyzed under the assumption of no flaws, but in the course of the usage or after manufacturing, flaws can arise.

At first sight, the large amount of time and money spent for the "pure" stress analysis seems in the case of appearance of cracks suddenly useless. Nevertheless, the stress analysis is not without value, but it is not the only evaluation basis. It must be combined with fracture mechanics.

In practice it is generally felt that repair is better than the existence of some small flaws.

Another connection would be between the fracture mechanics and the probabilistic analysis. The question in this case would be e. g.: how to proceed in the case of a flaw in the thick walled vessel? The solution in this case is the so-called probabilistic fracture mechanics, developed from reliability analysis and deterministic fracture mechanics.

SYMBOLS USED

S_0	- Mean value of the load, e. g. external pressure
R_0	- Mean value of the resistance, e. g. buckling load
S_q	- "Maximum" load acc. to the deterministic approach
R_p	- "Minimum" resistance acc. to the deterministic approach
p, q	- Fractions (see shaded areas in Fig. 2)
$v_0 = R_0/S_0$	- Safety factor acc. to the mean values
$v = R_p/S_q$	- Safety factor acc. to min R/max S
p_f	- Failure probability
$f_s(x)$	- Probability density function of the load
$f_r(x)$	- Probability density function of the resistance

REFERENCES

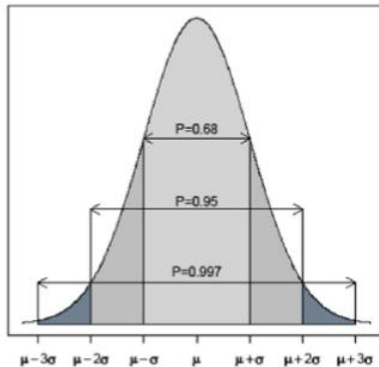
- [1] Prodan, M., "Failure and Non-Failure Probability of a Buried Thick-Walled Vessel". Proc. 8th SMIRT Conf., Paper M1J 1/5, Brussels, 1985

Mathematische (statistische) Erläuterungen zur Normalverteilung

Normalverteilung

Die Normalverteilung ist die wichtigste stetige Verteilung. Sie wurde als Modell für Messwerte bzw. Messfehler entwickelt und passt dort meist sehr gut. Doch das ist nicht der einzige Grund: wie wir später sehen werden, hat die Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit beliebiger, identischer Verteilung approximativ eine Normalverteilung. Sie kann daher stets zum Einsatz kommen, falls sich ein Resultat aus einer additiven Überlagerung von vielen „kleinen Einflüssen“ ergibt. Die Normalverteilung mit ihrer Glockenform ist also so etwas wie eine „Naturkonstante“ in der Welt der Zufallsvariablen. Die Dichtefunktion einer Zufallsvariable X mit Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \text{ für } x \in (-\infty, +\infty).$$



Die Normalverteilung hat offensichtlich zwei Parameter. Der Lageparameter $\mu \in (-\infty, +\infty)$ ist für Verschiebungen der Glockenkurve auf der x -Achse zuständig, ist Zentrum und Symmetriepunkt der Verteilung, und ist gleichzeitig auch der Erwartungswert $E[X]$. Der Skalenparameter σ^2 bestimmt die „Breite“ der Verteilung, d.h. streckt oder staucht die Glockenkurve und ist gleichzeitig die Varianz $\text{Var}(X)$. Für die Interpretation ist die sogenannte Standardabweichung σ zugänglicher. Bei $\mu \pm \sigma$ befinden sich die Wendepunkte der Dichtefunktion und das Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ enthält rund 68% der Wahrscheinlichkeit (d.h. der gesamten Fläche unter der Kurve). Im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ sind es rund 95%, und innerhalb von $\mu \pm 3\sigma$ liegen bereits ca. 99.7% der Wahrscheinlichkeit.

Um diese Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, muss man bekanntlich die Dichtefunktion integrieren. Dies ist im Fall der Normalverteilung aber schwierig, gibt es doch keine Stammfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dz$$

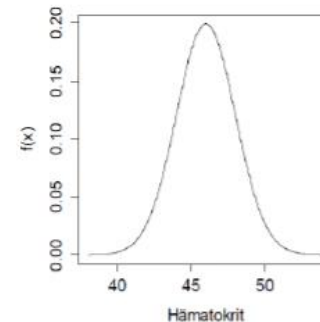
welche man in geschlossener Form schreiben könnte. Die Integrale existieren aber, und man kann/muss zur Berechnung auf numerische Methoden zurückgreifen. Während früher häufig mit Tabellen gearbeitet wurde, verwendet man heute in der Regel Computerprogramme.

Ein nicht-technisches Beispiel

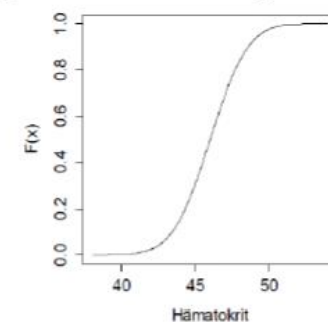
Als Beispiel betrachten wir den Hämatokrit. Er bezeichnet den Anteil der Erythrozyten am Volumen des Blutes. Diese stellen rund 99% des

Gesamtvolumens der Blutzellen dar, somit entspricht der Hämatokrit ungefähr dem Anteil des Zellvolumens im Blut und gibt Aufschluss über den Wasserhaushalt einer Person. Bei Menschen liegen die normalen Hämatokrit-Werte zwischen 42% und 50%. Wir können also den Hämatokrit mit einer Normalverteilung beschreiben, wo $\mu = 46$ und $\sigma = 2$. Dichte und kumulative Verteilungsfunktion sind dann wie folgt:

Dichtefunktion Normalverteilung



Kumulative Verteilungsfunktion



Abschluss des vorangehenden Rechenbeispiels

Im Nordischen Skisport wurde durch Doping-Kontrollbehörden ein Hämatokrit-Grenzwert von 51.5% festgelegt. Überschreitet ein Athlet diese Schwelle, so ist er nicht mehr zu den Wettkämpfen zugelassen. Wir können nun aufgrund der obigen Verteilung die Wahrscheinlichkeit $P(X > 51.5) = 0.3\%$ berechnen, mit welcher ein Athlet (ohne Manipulation) die Schwelle überschreitet. In der Praxis, d.h. wenn eine Stichprobe von Beobachtungen vorliegt, schätzt man die beiden Parameter μ und σ^2 oftmals aus den Daten durch Mittelwert und Stichproben-Varianz, d.h.:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

Zusammenfassung und Anmerkungen

- Gegenstand der Untersuchungen war ein dickwandiger Behälter, in dem hochtoxische Abfälle im Erdreich vergraben gelagert werden sollten.
- Als Belastungen wurden äusserer Druck und Korrosion über eine sehr lange Zeit angenommen.
- Als Material war der Stahlguss GS 50 vorgesehen.
- Der Behälter hätte seine Funktion über eine Zeit von 1000 Jahren erfüllen sollen.
- Die Aufgabenstellung beinhaltete eine wahrscheinlichkeitsrechnerische Analyse.
- Sie wurde an einer SMiRT-Konferenz (Structural Mechanics in Reactor Technology) in Brüssel und an einer ECF (European Conference on Fracture) in Budapest präsentiert.
- Mitautor der zweiten Präsentation in Budapest war Dr. John C. Radon, Mechanical Engineering Dept., Imperial College London. Diese Publikation ist in der ATT-Bibliothek vorhanden und bildete den Inhalt der obigen Folien 2 bis 5.
- Es sei auf die Problematik der Computer-Berechnungen mit sehr kleinen Zahlen (10^{-12}) hingewiesen.
- Infolge der grossen Interdisziplinarität der Problematik (Umwelt!) und auch aus anderen Gründen wurden schliesslich die Stahlguss-Behälter nicht produziert.