

Berichtigung der Unstimmigkeiten bei der Anwendung einer Näherungslösung nach Irwin auf Oberflächenrisse

M. Prodan / H. Decker

Es wird die Bruchmechanik aus der Sicht der Materialprüfung und der Anwendung auf Bauteile in der Praxis besprochen. Einige mathematische Unklarheiten werden richtiggestellt, die sich in der angewandten Bruchmechanik verbreitet haben. Betrachtet wird eine auf Zug beanspruchte und mit einem Oberflächenriß behaftete Platte.

Correction des écarts lors de l'application d'une solution approchée du type d'Irwin pour des fissures de surface. *La mécanique de rupture sera traitée dans l'optique de l'essai des matériaux et de l'application pratique concernant des éléments de construction. On éclaire, du point de vue mathématique, quelques points obscurs qui s'étaient répandus dans la mécanique de rupture. Dans cet exposé, on observe le cas d'une plaque mise sous contrainte et comportant des fissures de surface.*

Rectification of discrepancies in the application of Irwin's approximate solution to surface cracks. *Fracture mechanics is discussed from the viewpoints of materials testing and application, i.e. how to transfer the results to a real component. Mathematical discrepancies are clarified, which are widespread in applied fracture mechanics. A part-through crack is examined in a plate in tension.*

Das Modell

Um die Bedeutung des Modelles hervorzuheben, sei die Bruchmechanik aus zweierlei Sicht, der Materialprüfung und der Anwendung, kurz besprochen. Dem Materialprüfer ermöglicht die Bruchmechanik, die Bruchzähigkeit eines Werkstoffes zu bestimmen. Im linear-elastischen Fall handelt es sich dabei um den kritischen Wert des Spannungsintensitätsfaktors K_{IC} . Für die Bestimmung dieses Werkstoffkennwertes stehen dem Materialprüfer geeichte Proben und genormte bruchmechanische Prüfvorschriften zur Verfügung.

Für den Anwender ist die Sache damit noch lange nicht erledigt. Die Proben der Materialprüfung sind stark vereinfacht, verglichen mit den in der Praxis vorkommenden Bauteilen hinsichtlich Abmessungen, Geometrie und Belastung. Der Anwender steht vor der Frage: Wie kann er die an Proben ermittelten Kennwerte für seine Bauteile verwenden?

Hinter dieser Fragestellung verbirgt sich eine komplexe Problematik. Man fragt nach der Geometrieabhängigkeit der kritischen Bruchzähigkeitswerte (im linearelastischen Fall: K_{IC}) sowie nach dem Zusammenhang zwischen den Bruchparametern (im linearelastischen Fall: K_I) und der Belastung des Bauteils.

In der Regel lassen sich diese Fragen in Form von exakten analytischen Lösungen nicht beantworten. Daher ist man auf die Verwendung von Modellen angewiesen. Weiterhin gibt es noch die Möglichkeit, aufwendige numerische Berechnungen zum Beispiel nach der Methode der finiten Elemente durchzuführen. Solche Berechnungen sind aber einerseits sehr kostspielig, andererseits liefern sie nur Lösungen für den behandelten Einzelfall, das

heißt, die Resultate lassen sich nicht oder nur begrenzt verallgemeinern.

Bei der ersterwähnten Behandlung von Rißproblemen fängt man verständlicherweise mit dem Modellieren relativ einfacher Riß- und Geometrieconfigurationen an. Danach sollte eine Erweiterung zu komplizierteren Anordnungen, die in der Praxis häufiger vorkommen (z.B. nichtdurchgehende anstatt durchgehende Risse usw.), als nächste Ausbaustufe folgen.

Die in *Abbildung 1* gezeigte Anordnung zeichnet sich durch mehrere Vorzüge aus und gehört daher zu den fortgeschrittenen Modellen. Sie ermöglicht eine anschauliche Diskussion der Anwendung auf Druckbehälter. Von den in Bauteilen möglichen Oberflächen- und Innenfehlern

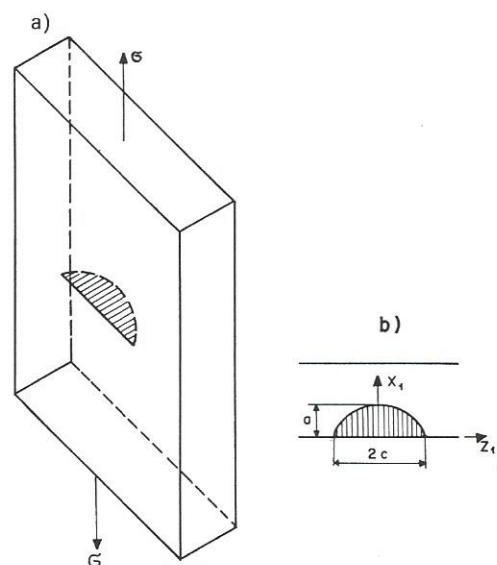


Abb. 1 Halbelliptischer Oberflächenriß in einer auf Zug beanspruchten Platte

stellt sie den ersteren dar (Oberflächenfehler sind ungünstiger für den Spröddbruch als Innenfehler). Reale Oberflächenrisse lassen sich näherungsweise durch eine halb-elliptische Form beschreiben. Weitere Merkmale des Modells sind: Der Fehler liegt rechtwinklig zur Oberfläche und rechtwinklig zur größten Zugspannung. Der Fehler ist flach, und die Rißufer laufen unendlich spitz zusammen.

Die Irwinsche Näherungslösung, die im folgenden behandelt wird, gilt strenggenommen nur für Risse in ebenen Platten. Auf die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten bei der Anwendung auf zylindrische Wände wird nicht eingegangen.

Die Formel nach Irwin

Zur Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors für den halb-elliptischen Riß von *Abbildung 1* läßt sich aus Literatur [1] folgende Formel ableiten:

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{1,2 \pi a}}{\sqrt{Q}} \left[\left(\frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right]^{1/4} \quad (1)$$

mit

$$Q = \Phi^2 - 0,212 \left(\frac{\sigma}{s} \right)^2 \quad (2)$$

und

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \left[\sin^2 \varphi + \left(\frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/2} d\varphi \quad (3)$$

K_I = Spannungsintensitätsfaktor

Q = Rißformfaktor

Φ = elliptisches Integral zweiter Gattung

s = Fließspannung

Übrige Bezeichnungen nach *Abbildungen 1* und *2*.

Man findet in der Literatur zwei verschiedene Definitionen für den Spannungsintensitätsfaktor. Sowohl $\mathcal{K}_I$ in Literatur [1] als auch K_I , der später in der Bruchmechanik vorwiegend Verwendung gefunden hat, wurden auf Grund des sogenannten Griffith-Risses definiert. Der Griffith-Riß ist ein Durchriß der Länge $2a^*$ in einer unendlichen Scheibe unter einachsiger Zugspannung σ .

Dafür gilt:

$$\mathcal{K}_I = \sigma \sqrt{a^*} \quad (4a)$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a^*} \quad (4b)$$

also

$$K_I = \mathcal{K}_I \cdot \sqrt{\pi} \quad (5)$$

Der Faktor $\sqrt{\pi}$ ist nur aus mathematischen Zweckmäßigkeitsgründen in Gleichung (4b) eingeführt worden. Er hat keinerlei physikalische Bedeutung. In manchen Darstellungen fehlt er, so auch in Literatur [1]. Man sieht dies, wenn man in der dort angegebenen Referenz [3] nachschaut. Hier ist $\mathcal{K}_I$ wie in Gleichung (4a) definiert.

Als Ausgang für die Ableitung von Gleichung (1) diene

$$G_I = \frac{\pi (1 - \nu^2) \sigma^2}{E \cdot \Phi^2} \left(\frac{a}{c} \right) (a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \quad (6)$$

G_I = Rißerweiterungskraft

ν = Poissonsche Zahl

E = Elastizitätsmodul

Siehe Literatur [1].

Mit

$$G_I = \frac{\pi}{E} (1 - \nu^2) \mathcal{K}_I^2 = \frac{(1 - \nu^2) K_I^2}{E} \quad (7)$$

folgt

$$K_I^2 = \frac{\sigma^2 \pi a}{\Phi^2} \left[\left(\frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right]^{1/2} \quad (8)$$

Für den Fall $\varphi = \pi/2$ ergibt sich

$$K_I^2 = \frac{\sigma^2 \pi a}{\Phi^2} = K_{I\pi/2}^2 \quad (9)$$

Gleichung (9) in Gleichung (8) eingesetzt:

$$K_I^2 = K_{I\pi/2}^2 \left[\left(\frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right]^{1/2} \quad (10)$$

Unter Berücksichtigung des Einflusses der vorderen und hinteren freien Oberflächen sowie einer Plastizitätskorrektur in Literatur [1] nimmt Gleichung (9) folgende Form an:

$$K_{I\pi/2}^2 = \frac{1,2 \sigma^2 \pi a}{\Phi^2 - 0,212 \left(\frac{\sigma}{s} \right)^2} \quad (11)$$

Gleichung (11) in Gleichung (10) eingesetzt, ergibt Gleichung (1).

Es müssen bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein, damit die Formel (1) gilt. Diese Voraussetzungen werden in der Originalarbeit [1] und auch anderswo in der Literatur behandelt. Im vorliegenden Aufsatz soll nicht der Gültigkeitsbereich der Formel, sondern einige Unstimmigkeiten bei ihrer Anwendung sollen besprochen werden. Diese Unstimmigkeiten haben sich bei den Anwendungsbeispielen in der Literatur ziemlich verbreitet. Das ist eine Folge davon, daß man sich nur mit den Endformeln und nicht mit ihrer Ableitung beschäftigt hat.

Die Unstimmigkeiten

Irwin beschrieb die Halbellipse, die den Riß darstellen soll, mit karthesischen Koordinaten und in der parametrischen Form:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \quad (12)$$

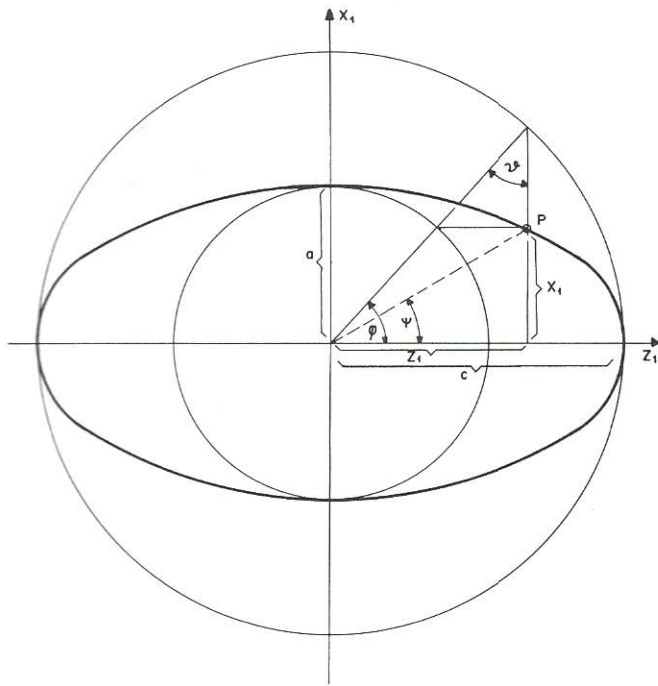


Abb. 2 Illustration zum Winkel ψ und elliptischen Integral zweiter Gattung Φ

$$x_1 = a \cdot \sin \varphi \quad (13a)$$

$$z_1 = c \cdot \cos \varphi \quad (13b)$$

(vgl. Abb. 1 und 2)

Der Winkel φ wurde von den Anwendern der Formel (1) falsch interpretiert. φ bedeutet nicht den zum betrachteten Punkt $P(x_1, z_1)$ der Rißfront zugehörigen Polarkoordinatenwinkel (s. Abb. 2). Dieser Winkel ist ψ . Zwischen ψ und φ besteht nach Abbildung 2 und den Gleichungen (13a) und (13b) folgender Zusammenhang:

$$\tan \psi = \frac{a}{c} \cdot \tan \varphi \quad (14)$$

Nur für die Punkte der Rißfront an der vorderen freien Oberfläche und für den Punkt, der am weitesten in die Scheibe hineinragt, gilt, daß $\psi = \varphi$. Wenn man aber auch für Zwischenpunkte an der Rißfront den dort vorhandenen lokalen Spannungsintensitätsfaktor $K_I = K_I(\psi)$ ermitteln will, so ist zusätzlich zu Gleichung (1) auch Gleichung (14) zu berücksichtigen.

Das elliptische Integral zweiter Gattung

Integrale der Form

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (15)$$

$$|k| < 1, k_c = \sqrt{1 - k^2} < 1$$

k = Modul des elliptischen Integrals

heißen vollständige elliptische Integrale zweiter Gattung. Derartige Integrale lassen sich nur iterativ bestimmen.

In Literatur [2] wurde Φ mit Hilfe der Bartky-Transformation ermittelt.

Zunächst muß Φ aus Gleichung (3) auf die Form von Gleichung (15) gebracht werden. Aus Literatur [1] läßt sich entnehmen:

$$\Phi = \frac{1}{c} \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{d\varphi} \cdot d\varphi \quad (16)$$

Mit einem Winkel $\vartheta = \pi/2 - \varphi$ (siehe Abb. 2) gilt für Φ :

$$\Phi = \frac{1}{c} \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{d\vartheta} \cdot d\vartheta \quad (17)$$

da $d\vartheta = -d\varphi$.

Für x_1 und z_1 gilt:

$$x_1 = a \cdot \cos \vartheta \quad (18a)$$

$$z_1 = c \cdot \sin \vartheta \quad (18b)$$

Das Bogenelement bestimmt sich zu:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{d\vartheta}\right)^2} d\vartheta = \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta} d\vartheta \end{aligned} \quad (19)$$

Aus den Gleichungen (19) und (17) ergibt sich Gleichung (15) mit $k^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}$ und

$$k_c^2 = \sqrt{1 - k^2} = \frac{a}{c} < 1.$$

Schlußbemerkungen

Die mathematischen Trockenübungen dieses Aufsatzes dürften in zweierlei Hinsicht nicht uninteressant sein: erstens im Hinblick auf die Ermittlung des Verlaufs des Spannungsintensitätsfaktors entlang der Rißfront (wichtig z. B. für die Erfassung der Entwicklung der Rißform während eines stabilen oder instabilen Wachstums), zweitens darauf, was die Handhabung von Φ betrifft. Es gibt diesbezüglich einige Widersprüche in der einschlägigen Literatur. Besonders dann, wenn man Φ durch eine Formel explizit bestimmen muß und nicht auf tabellierte oder graphische Werte zurückgreifen kann.

M. Prodan, dipl. Masch.-Ing., wissenschaftlicher Mitarbeiter am Eidgenössischen Institut für Reaktorforschung (EIR), CH-5303 Würenlingen

H. Decker, Elektroing.-Student der TU Hannover, zurzeit Praktikant am Eidgenössischen Institut für Reaktorforschung (EIR), CH-5303 Würenlingen

(Eingang des Manuskriptes: 20. November 1978)

Literaturverzeichnis

- 1 Irwin, G. R.: Crack-Extension Force for a Part-Through Crack in a Plate. Journal of Appl. Mech. 29 (1962), Nr. 4, S. 651...654.
- 2 Prodan, M./Decker, H.: Berechnungen zum zweidimensionalen Rißwachstum. EIR-Mitteilung TM-IN-756, Würenlingen, September 1978.